Übergang von Ähnlichkeitsrechnungen (Proportionen, Verhältnisse) zur Trigonometrie

Eine Umsetzungsarbeit zum Kurs

Schwierigkeiten bei mathematischen Themen

von
Urs Altenbach

kommentiert von
Hansruedi Kaiser

2005/2006

Einleitende Bemerkungen

Die Fachstelle Pädagogisch Fördermassnahmen versucht auf diesem Weg interessante Umsetzungsarbeiten der Studierenden einem grösseren Publikum zugänglich zu machen.

Diese Arbeiten entstehen im Kontext einzelner Kurse, dokumentieren den Lernprozess der Studierenden und erheben nicht den Anspruch, umfassend in das behandelte Thema einzuführen. Sie sind deshalb meist für sich allein nicht ohne weiteres verständlich, sondern bedürfen einer gewissen Einbettung in die am Kurs behandelten Inhalte. Diese Einbettung wird durch einen begleitenden Kommentar der Dozentin oder des Dozenten hergestellt. Dieser Kommentar ist mit den Studierenden abgesprochen.

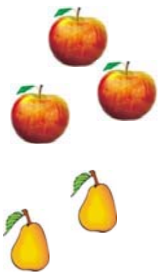
Der vorliegende Text ist also das gemeinsame Produkt verschiedener Autoren. Die Studierenden stellen v.a. die Umsetzungsidee und ihre Erfahrungen damit dar. Die Dozentin oder der Dozent sorgt für die thematische Einbettung.

Das Layout spiegelt dies, indem jeweils die ungeraden Seiten die unveränderte Arbeit der Studierenden präsentiert, so wie sie als Umsetzungsarbeit akzeptiert wurde. Auf den geraden Seiten finden sich Erläuterungen und Kommentare zur jeweils folgenden ungeraden Seite. **Es empfiehlt sich, das Ganze doppelseitig auszudrucken.** Dann liegen beim Lesen immer schön Original und Kommentar nebeneinander.

Inhaltsverzeichnis

Kommentar

Im Kurs wurde das Bild der „drei Welten“ eingeführt, in denen sich jemand simultan bewegen muss, will er oder sie eine mathematische Aufgabe lösen.

Problemlösen	*Mathematik*	*Rechnen*
Dinge	Zahlen	Notation
	a + b = b + a	3 + 2 = 5 LL + LO = LOL

- **Problemlösen:** Lösen einer konkreten Aufgabe, z.B. die Konstruktion eines Dachstocks.
- **Mathematik:** Modellieren gewisser Aspekt des Problems durch mathematische Konzepte, z.B. den Querschnitt durch einen Dachstock mittels Dreiecke.
- **Rechnen:** Berechnen gewisser im Modell vorkommender Grössen aus anderen Grössen.

„In der Trigonometrie ... Die Wenigsten wissen, was da gerechnet wird“: Ein Problem das aufritt, wenn der Unterricht die Welt des Rechnens ins Zentrum stellt und die anderen beiden Welten sowie deren Verknüpfung vernachlässigt.

Ebenfalls wurde im Kurs betont, dass Lernen ein konstruktiver Prozess ist, dass nie wirklich neues Wissen aufgenommen wird, sondern immer bestehendes Wissen weiter entwickelt wird.

„... dass der Schritt ... sehr klein ist“: Bestehendes Wissen muss nur wenig erweitert werden.

„Voraussetzungen“: Und so sieht das bestehende Wissen aus.

a) Begründungszusammenhang

Alle Jahre wieder stehen wir vor demselben Problem. Wenn nur schon das Wort Trigonometrie angesprochen wird, entstehen grosse Angstgefühle und Hemmungen. Die Schüler sind von Beginn an blockiert oder zumindest negativ vorbelastet.
In der Trigonometrie rechnen wir mit Winkeln und irgendwelchen, dazugehörigen Zahlen, welche aber von den Auszubildenden nirgends recht eingeordnet werden können. Es wird fleissig mit Formeln und Zahlen hantiert. Die Wenigsten wissen aber, was da gerechnet wird.

Nun stellt sich also die Frage: Wie kann man dieses Thema den Lernenden möglichst einfach und verständlich näher bringen, und zwar so, dass es für sie einigermassen nachvollziehbar ist und wenn möglich auch nachvollziehbar bleibt!

Die Idee des Umsetzungsversuches ist relativ einfach. Die Lehrlinge sollen nun selbst erfahren, dass der Schritt von den Verhältnisrechnungen zur Trigonometrie sehr klein ist. Wir gehen von bekanntem Wissen aus und leiten dann mittels eines einfachen Versuchs zur Trigonometrie über.
Dadurch erhoffe ich mir, den Lernenden die Angst vor der Trigonometrie zu nehmen und das Verständnis zu verbessern.
Das sollte dann automatisch zu besseren Resultaten führen.

Voraussetzungen:

Bevor das Thema Trigonometrie angegangen wird, müssen dem Lernenden schon diverse andere „einfachere“ Dreiecksberechnungen geläufig sein.
In der Berufsgruppe der Zimmerer ist das vor allem der pythagoreische Lehrsatz. Weiter gehören auch alle Bezeichnungen am Dreieck, Winkelsumme- Innkreis- und Umkreisberechnungen, sowie Flächenberechnungen zum nötigen Rüstzeug.

Der letzte Schritt vor der Trigonometrie sind dann die Ähnlichkeitsrechnungen. Sie werden auch Proportionen oder Verhältnisrechnungen genannt

Des Weitern wurde am Kurs thematisiert, welche „Formen“ Wissen annehmen kann:

- **Deklarativ:** Konzepte, Theorien und Regeln; einsetzbar für bewusstes, analytisches Vorgehen.
- **Situativ:** Erinnerungen an erlebte Situationen und Problemlösungen; situatives Wissen leitet Handeln indem analog zu erinnerten Situationen vorgegangen wird.
- **Prozedural:** Automatismen, wie sie z.B. beim gut beherrschten schriftlichen Addieren ablaufen.
- **Sensomotorisch:** Automatismen, wie sie z.B. beim Lenken eines Fahrrads ablaufen.

Eine weitere Frage, die im Kurs angeschnitten wurde: Wann sind die Chancen am grössten, dass die Lernenden eine Instruktion annehmen, das angebotene Wissen zu ihrem eigenen Wissen machen? Hier wurde betont, dass dies am ehesten geschieht, wenn sie das Angebotene als Antwort auf eine Frage erleben, die sie selbst haben.

„Die Lernenden fühlen sich als Erfinder ihrer Lösung ...“: Vielleicht nicht gerade „Erfinder“, denn es ist ja nicht garantiert, dass sie die Lösung selbst finden. Aber dadurch, dass sie auf die Suche danach gehen, stellen sich ihnen Fragen, welche die Lösung dann beantwortet.

Damit wird ein weiteres Thema des Kurses aufgegriffen, nämlich die Frage des Zusammenspiels zwischen „Lernen aufgrund von Instruktion“ und „Lernen aus Erfahrung“. Es wurde betont, dass in den allermeisten Fällen weder der eine noch der andere Zugang alleine funktioniert, sondern dass es meist beider Zugänge bedarf. Dabei schaukeln Erfahrung und Erklärung gegenseitig das Verständnis in kleinen Schritten hoch.

---

b) Theoretische Überlegungen:

1. Was für Wissen ist bereits vorhanden?

   Situatives Wissen ist schon vorhanden. (Verhältnisrechnungen)

   Deklaratives und prozedurales Wissen ist zum Teil schon vorhanden. (Verhältnisrechnungen)

   Sensomotorisches Wissen ist zum Teil vorhanden (Tastenkombinationen am Taschenrechner)

   An bestehende Wissensformen kann also „angedockt“ werden. Es besteht die Möglichkeit, dass die verschiedenen Wissensarten zusammenspielen, sodass der Lernende selbst ein Lösungsweg findet und somit das Problem löst.

2. Wie kann das Zusammenspiel von Lernervorwissen und Lehrerfachwissen optimiert werden, um einen möglichst hohes Verständnis zu erzielen?

   Das Konstruktionsprinzip scheint mir hier angebracht. Der Ausgangspunkt ist das Vorwissen des Lernenden. Darauf soll nun aufgebaut werden. Kombiniert mit handlungsorientiertem Unterricht und entdeckendem Lernen soll dieses Prinzip zum Nachdenken, Vorausschauen und Zusammenhänge sehen animieren.
   Die Lernenden fühlen sich als Erfinder ihrer Lösung und akzeptieren diese deshalb auch besser.

3. Welche Umsetzungsmöglichkeit ist sinnvoll und verspricht am meisten Erfolg?

   Der Lernende muss selbst etwas zur Lösung des Problems beitragen. Er muss eine Erfahrung machen die ihm Plausibel vorkommt und welche auch nachvollziehbar ist.
   Durch deklarative Inputs wird das Thema gefestigt.
   Ich will dies mit einem Mix aus aktivieren von bestehendem Wissen und deklarativen Inputs erreichen.

Kommentar

c) Umsetzungsbeispiel:

Aufbau der Lektion:

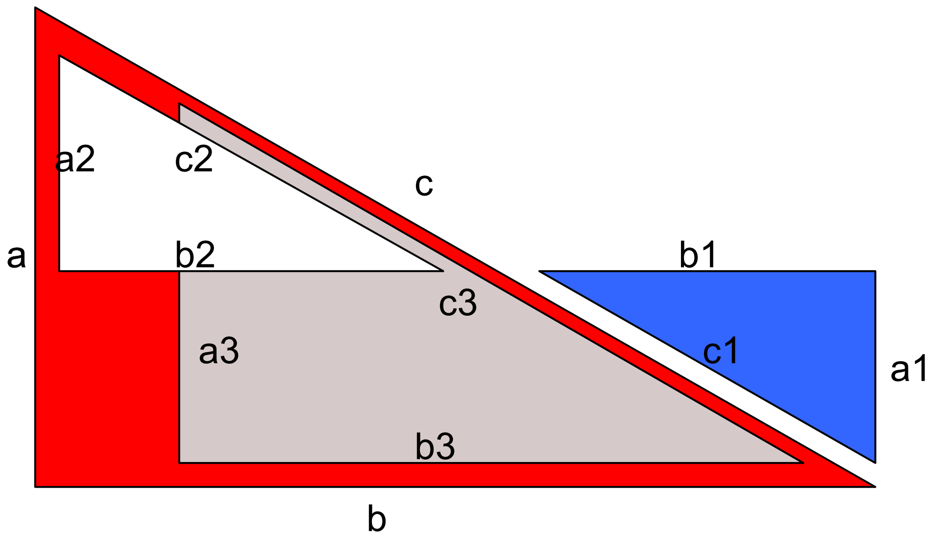
1. Rückblick Ähnlichkeitsrechnungen
2. rechnerisches Beispiel
3. zeichnerisch-mathematischer Versuch
4. Besonderheiten des Versuchs aufzeigen
5. Bezug von Winkel und Verhältniszahl aufzeigen
6. Tabelle Winkel mit dazugehöriger Verhältniszahl (Tangenstabelle)
7. Rechenbeispiel „ Tangens“
8. Schlussfolgerung

„Ein kurzer Rückblick“: Vorerfahrung wird aufgegriffen.

1.Ein kurzer Rückblick:

Was sind ähnliche Figuren?

In solchen Figuren stehen entsprechende Strecken im gleichen Verhältnis zueinander, und die dazugehörigen Winkel sind gleich gross. Zwei Dreiecke sind einander ähnlich, wenn sie in zwei Winkel übereinstimmen. Die Flächen sind dabei verschieden gross.



Diese vier Dreiecke sind einander ähnlich!

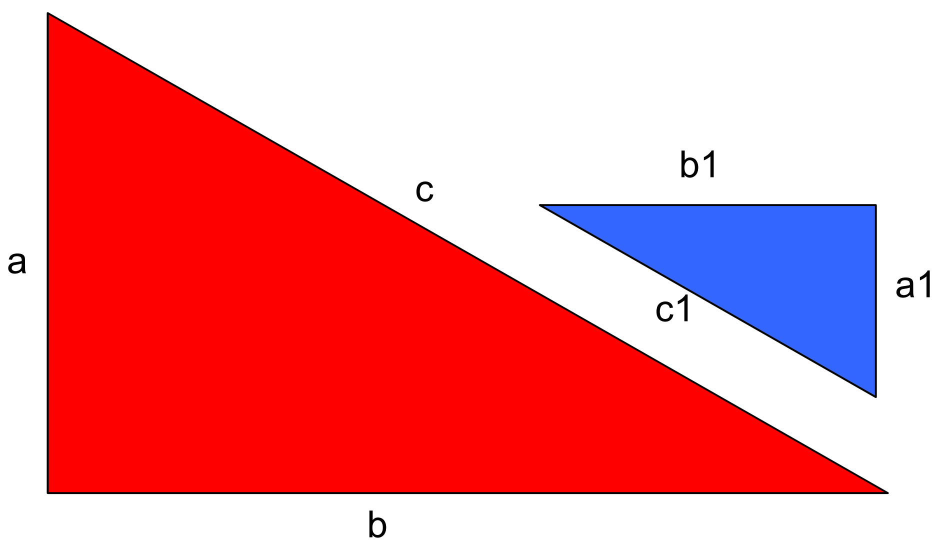
Die Seitenverhältnisse sind gleich gross:

a : b : c = a1: b1: c1 = a2 : b2 : c2 = a3 : b3 : c3

Kommentar

2. Ein Beispiel:

Gegeben:	b	=	3.2m
	b1	=	2.6m
	a	=	2.2m
Gesucht:	a1	=	?



Lösung:

$$\frac{a1}{b1} = \frac{a}{b}$$

$$a1 = \frac{a \bullet b1}{b} = \frac{2.2m \bullet 2.6m}{3.2m} = \underline{1.788m}$$

Kommentar

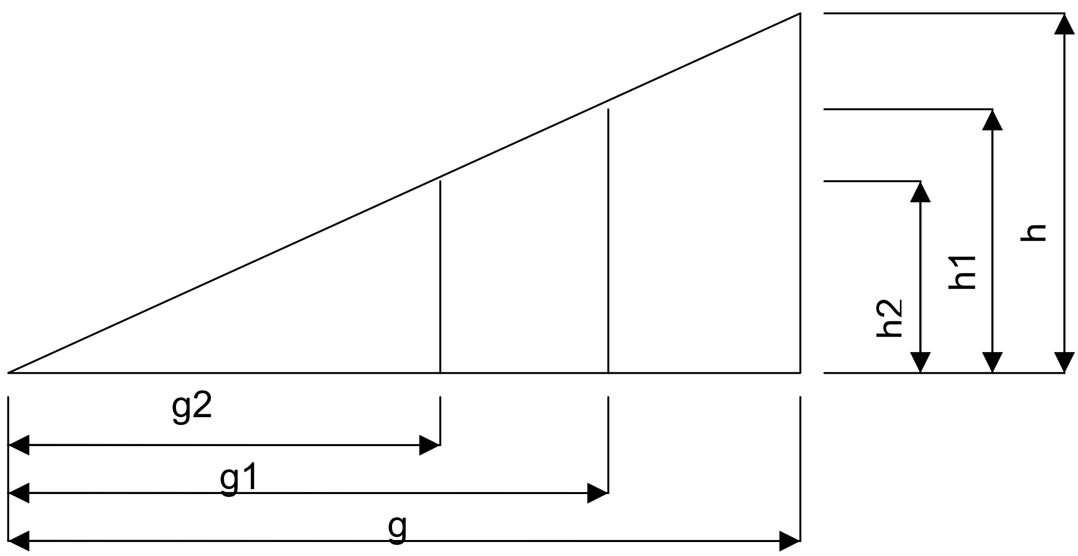
„... ein kleiner zeichnerisch-mathematischer Versuch“: Neue Erfahrungen werden ermöglich. Der Einstieg in die Schaukel „Erfahrung/Erklärung“ wird über „Erfahrung“ genommen.

Ausgangspunkt ist also die Welt des konkreten Hantierens, die Welt der Probleme im Bild der drei Welten. Wobei nicht ein konkretes, bereits vorhandenes Problem als Startpunkt dient. Das didaktische Arrangement scheint sich vielmehr darauf zu verlassen, dass die Aufgabe durch die intensive Auseinandersetzung damit schon von selbst zum Problem wird.

3. Nun ein kleiner zeichnerisch-mathematischer Versuch

- Zeichne ein rechtwinkliges Dreieck mit dem Grundmass g=10cm und der Höhe h= 6cm. GENAU!
- Berechne das Verhältnis h : g =
- Zeichne in das bestehende Dreieck ein ähnliches Dreieck mit einer Höhe h1= 5cm. GENAU!
- Messe das Grundmass g1 = GENAU!
- Berechne das Verhältnis h1 : g1 =
- Zeichne in das bestehende Dreieck ein ähnliches Dreieck mit einem Grundmass g2 = 7cm GENAU!
- Messe die Höhe h2 = GENAU!
- Berechne das Verhältnis h2 : g2 =

…………Kann beliebig in die Länge gezogen werden…………



„Gibt es eine Besonderheit ...“: Gewisse Merkmale der (situativen) Erfahrungen werden als (deklarative) Konzepte abstrahiert. Die Instruktion führt dabei den Begriff „Verhältniszahl“ ein.

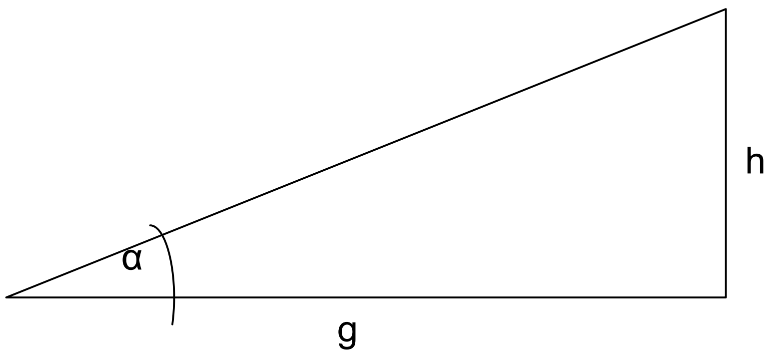
„AHA“: Das Aha-Erlebnis ist eine Einsicht in der mathematischen Welt der drei Welten.

4.Gibt es eine Besonderheit bei den drei Verhältnissen?

Bei diesen ähnlichen Dreiecken ist das Verhältnis Höhe zu Grundmass (h:g) immer gleich gross. Das Resultat ist eine Verhältniszahl.
Diese Zahl hat nun also einen bestimmten Zusammenhang einer Höhe zu einem Grundmass.

AHA

Aus einer bestimmten Höhe und dem Grundmass ergibt sich aber auch immer ein dazugehörender Neigungswinkel, welchen wir mit dem griechischen Buchstaben α bezeichnen.



Einige grundsätzliche Überlegungen dazu:

In welcher Einheit wird ein Winkel normalerweise angegeben?
Wie klein darf α sein, damit wir noch ein Dreieck haben?
Wie gross darf α sein, damit wir noch ein Dreieck haben?

Die Winkel werden in Grad ° angegeben, und der Winkel α muss grösser als 0° und kleiner als 90° sein.

Kommentar

Neue Erfahrungen werden ausgehend vom eingeführten Konzept gemacht und auch in den entsprechenden Begriffen beschrieben.

Dadurch wird einerseits deklaratives mit situativem Wissen verbunden und andererseits wird die Brücke zwischen der Welt der konkreten Probleme und der mathematischen Konzepte gefestigt.

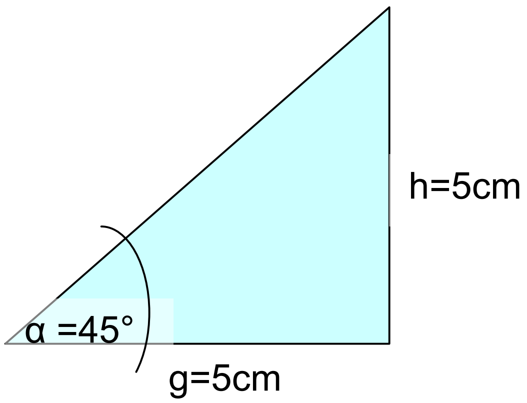
5.Bezug von Winkel und Verhältniszahl

Wir wissen nun also, dass es einerseits eine Winkelangabe in Grad ° gibt, und anderseits haben wir aber auch festgestellt, dass es für einen bestimmten Winkel eine Verhältniszahl gibt.

Wie gross ist diese Verhältniszahl bei einem Winkel von 45°?

Da bei diesem Dreieck die Höhe und das Grundmass dieselbe Länge aufweisen, muss die Zahl 1 ergeben!

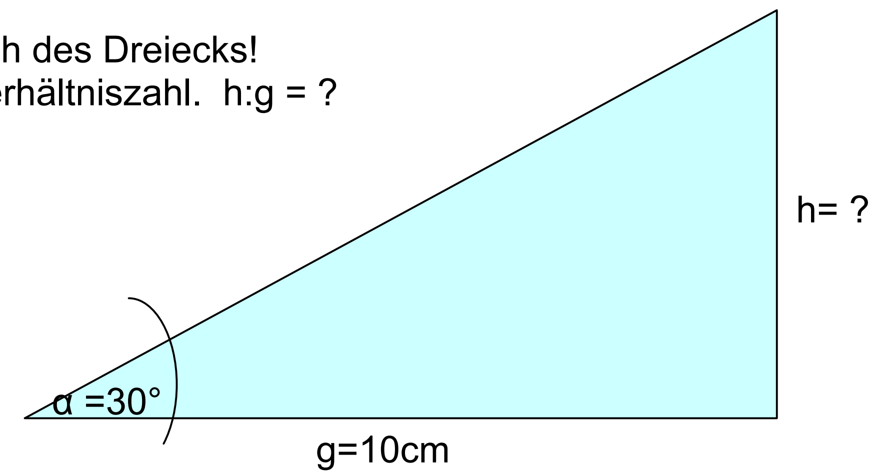
$h : g \;=\; 5 : 5 \;=\; \underline{1}$



Ist die Höhe grösser als das Grundmass, so muss die Verhältniszahl grösser als 1 sein. Ist die Höhe jedoch kleiner als das Grundmass, wird die Verhältniszahl kleiner als 1.

Nun zeichnen wir mittels Geodreieck ein rechtwinkliges Dreieck mit dem Winkel α 30° und dem Grundmass g von 10 cm.

Messe die Höhe h des Dreiecks!
Bestimme die Verhältniszahl. h:g = ?



„Tabellenwert“: Per Instruktion wird ein Instrument für die dritte Welt, die Welt des Rechnens und der Berechnungen eingeführt.

6.Tabellenwert Winkel / Verhältniszahl

Wir können also bei allen rechtwinkligen Dreiecken mit der Höhe und dem Grundmass die Verhältniszahl errechnen.
Wir können auch mit der Höhe und dem Grundmass ein rechtwinkliges Dreieck zeichnen und den Winkel α mit dem Geodreieck messen.
Diese Werte können in einer Tabelle einander gegenübergestellt werden.

Die Verhältniszahl von 0.46631 entspricht also Einem Winkel von 25 °.

Was aber kann ich jetzt mit diesen Zahlen anfangen?

Unter einem Winkel von 25° kann ich mir etwas vorstellen. Ich kann aber mit dieser Winkelzahl nicht rechnen.

Unter der Verhältniszahl von 0.46631 kann ich mir nichts vorstellen. Ich kann aber damit Ähnlichkeitsrechnungen anstellen.

Also ist es von Vorteil, die jeweilige Verhältniszahl eines bestimmten Winkels zu kennen, oder zu wissen woher man sie bekommt.

Winkel °	Verhältniszahl
5°	0.08749
10°	0.76327
15°	0.26795
20°	0.36397
25°	0.46631
30°	0.57735
35°	0.70021
40°	0.83910
45°	1.00000
50°	1.19175
55°	1.42815
60°	1.73205
65°	2.14451
70°	2.74748
75°	3.73205
80°	5.67128
85°	11.43005
89°	57.28996
90°	-------------------

Früher hat man diese Werte aus Tabellen herausgelesen.
Heute haben wir auf dem Taschenrechner Tasten, mit welchen die dazugehörenden Verhältniszahlen eines Winkels automatisch ausgerechnet werden. (Tan/Sin/Cos)

Übrigens: die Verhältniszahl Höhe zu Grundmass nennt man

<u>Tangens</u> .

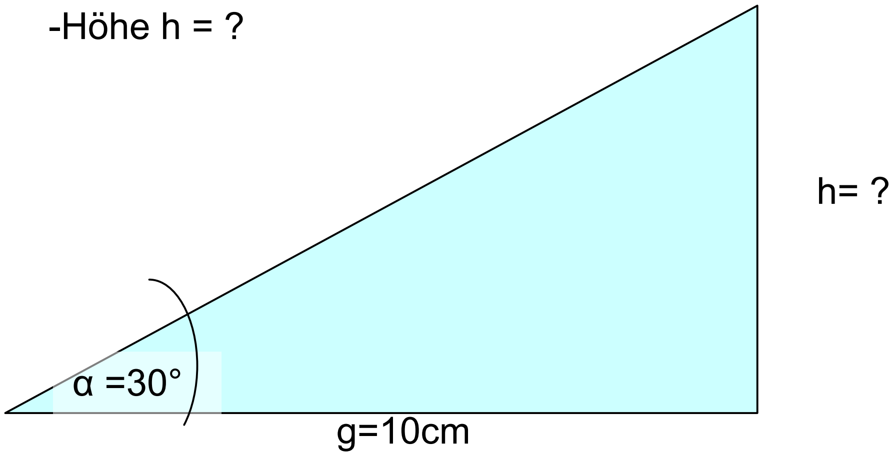
Kommentar

„Rechenbeispiel“: Das „Turnen“ in der Welt des Rechnens wird eingeführt und angeleitet. Später kann sich hier durch Üben prozedurales Wissen herausbilden.

7.Rechenbeispiel Tangens:

Gegeben: -Winkel α =30°
-Grundmass g = 10 cm

Gesucht: -Höhe h = ?



Lösung:

Wir wissen: -Höhe: Grundmass = Verhältniszahl (Tangens)
$h : g = \tan \alpha$

Wir kennen: -Grundmass g = 10 cm
-Tangenswert von 30°aus Tabelle = 0.57735

Nun können wir die Formel $h : g = \tan \alpha$ umstellen, damit wir die gesuchte Höhe h ausrechnen können.

Formel: $h = g \cdot \tan \alpha$
$h = 10 \cdot 0.57735 = \underline{5.7735cm}$

Damit wir nicht immer die Tangenswerte in Tabellen nachschlagen müssen, haben wir einen Taschenrechner der mit trigonometrischen Winkelfunktionen ausgerüstet ist.
Wenn ich den Tangenswert eines beliebigen Winkels wissen möchte, so kann ich den Winkel eingeben, die Taste tan drücken, und schon berechnet der Taschenrechner mir die dazugehörende Verhältniszahl.

Für die Beispielrechnung bedeutet dies:

$h = g \cdot \tan 30°$
$h = 10 \cdot \tan 30° = \underline{5.7735cm}$

8. Schlussfolgerung

Berechnungen mit Tangenswerten sind nichts Neues für uns. Es sind Ähnlichkeits- bzw. Verhältnisrechnungen. Nur hat diese bestimmte Verhältniszahl einen Namen und der dazugehörige Winkel ist bestimmt.

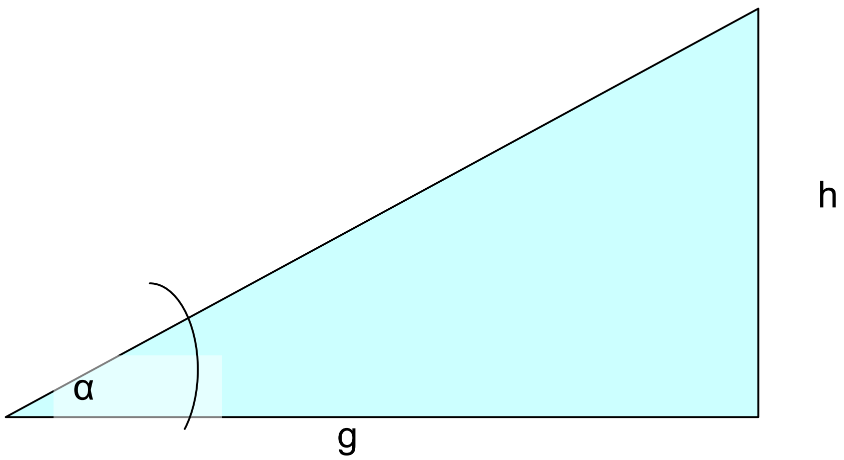
Formeln

$$\tan\alpha = h : g$$

$$h = g \cdot \tan\alpha$$

$$g = h : \tan\alpha$$

Rechtwinkliges Dreieck



„... muss dringend verbessert werden.“: In der Sequenz werden im wesentlichen situatives und deklaratives Wissen aufgebaut. Um daraus durch Üben prozedurales und sensomotorisches Wissen entstehen zu lassen, braucht Zeit.

„... das Nichtaussprechen ..“: Durch diesen Einstieg werden die Lernenden nicht mit einem „Stoffinhalt“ konfrontiert, sondern Wissen als Antwort auf Probleme/Fragen angeboten

---

Hier wird noch ein letztes Thema aus dem Kurs aufgenommen. In der mathematischen Welt kann man mit mehr oder weniger abstrakten Konzepten arbeiten. Es wurde betont, dass es zweckmässig ist, mit der Abstraktion nur so weit zu gehen, wie es wirklich notwendig ist. Begriffe und Konzepte, welche näher an der Welt der Probleme sind, erleichtern die Verbindung zwischen den beiden Welten.

---

d) Einige Überlegungen zum Umsetzungsbeispiel:

- Die theoretischen Überlegungen haben sich in der Umsetzung bewährt. Die Lernenden machten interessiert mit und haben persönliche Erfolge erzielt.
  „ Das isch jo gar nid so kompliziert wie das in dr Sek überecho isch! Dört hani nüt Checkt!“

- Das sensomotorische und prozedurale Wissen, vor allem auch der Umgang mit dem Taschenrechner, muss dringend verbessert werden.

- Die Repetition der Ähnlichkeitsrechnungen bildet die Grundlage, damit alle Lernenden etwa den gleichen Ausbildungsstand haben.

- Durch den zeichnerisch-mathematischen Versuch finden die Lernenden selbst heraus, dass die Verhältniszahl bei ähnlichen Dreiecken und den entsprechenden Seiten gleich bleibt.
  Je genauer gezeichnet und gemessen wird, desto identischer sind die Resultate.

- Durch das Nichtaussprechen vom eigentlichen Thema Trigonometrie (Tangens, Sinus, Kosinus), treten bei den Lernenden keine negativen Angstgefühle auf.

- „AHA-Erlebnis“ Diese Verhältniszahl bezieht sich nicht nur auf ein Seitenverhältnis sondern auch auf einen Winkel.

- Die Verhältniszahl **Höhe: Grundmass** ergibt den Tangenswert des Winkels α.

- Durch die Tangenstabelle wird die Zusammengehörigkeit von Winkel und Tangenswert veranschaulicht.

- In der Zimmermanns-Ausbildung sprechen wir bewusst nicht von Ankathete, Gegenkathete und Hypotenuse. Unter den Begriffen Höhe, Grundmass und Neigungslänge (Hypotenuse) können sich unsere Lernenden die verschiedenen Dreiecke besser Vorstellen, und es korrespondiert mit den Dreiecken, mit welchen wir im Fachzeichnen zu tun haben.

e) Reflexion

Die Umsetzung war ein guter Erfolg. Die Lernenden konnten ohne vorbelastet zu sein das Thema erarbeiten und selbst Schlussfolgerungen ziehen. Durch den zeichnerisch- mathematischen Versuch wurden sie zum mitdenken und mit tun inspiriert. Es wurden so Probleme entdeckt und Erfahrungen gemacht welche zwischen den Lernenden selbst diskutiert wurden. Mit einfachen Erklärungen meinerseits haben sie das Nötigste verstanden und die Zusammenhänge erkannt. Der Begriff „Tangens“ löst keine Angstgefühle aus. Sie haben verstanden, dass mit einem Winkel alleine keine Seitenlängen berechnet werden können. Man benötigt die Verhältniszahl, in unserem Fall den Tangens, dazu.

Ich empfinde es als sehr wichtig, ja unumgänglich, dass die Lernenden solche Selbsterfahrungen im Unterricht erleben können. Im Vergleich zu früheren Jahren ist die Materie besser verstanden worden. Auch die Resultate an den folgenden Übungen und Tests waren merklich besser geworden.

Durch die dreimalige Wiederholung (3 Klassen im selben Lehrjahr) konnte ich Verbesserungen meinerseits einfließen lassen, sodass die Unterrichtssequenz optimiert wurde. Bei der Umsetzung in der ersten Klasse hatte ich das Gefühl, den Lernenden bei Fragen jeweils zu wenig Zeit zum Nachdenken gelassen zu haben. Es erscheint mir wichtig, dass alle Schüler Zeit zum Nachdenken haben. Zu oft gab ich dem Ersten der sich meldete das Wort, sodass andere ihre Überlegungen nicht zu Ende führen konnten. Auch Rückschlüsse und Aha-Erlebnisse wurden dadurch von mehreren Schülern gemacht.

Schlussendlich habe ich vor allem „Leitplanken“ gesetzt, zwischendurch zielorientierte Fragen gestellt und Erkenntnisse zusammengefasst, welche aber meist von den Lernenden selbst kamen.

Dadurch war auch der Erfolg in der letzten Klasse am bessten.
Sie hatten im Trigotest den höchsten Notenschnitt, was nicht immer so ist.
Auch das positive Echo der Klasse war am größten.

Da diese Unterrichtssequenz bei den Lernenden sehr gut aufgenommen wurde werde ich sie in späteren Klassen wieder anwenden.

Literaturverzeichnis

Alle Unterlagen aus dem Kurs:

www.pfm.sibp.ch und dort: Ausbildung in PFM / Kursunterlagen / Zollikofen / Förderung im mathematischen Bereich

Dazu: Kaiser, H. (2005). Wirksames Wissen aufbauen - ein integrierendes Modell des Lernens. *Bern, h.e.p. verlag.*

Die Lernenden mussten nach dieser Unterrichtssequenz in einer Partnerarbeit den Lerninhalt repetieren, auftretende Probleme diskutieren und bei Unklarheiten Fragen formulieren. Diese haben wir mit der ganzen Klasse diskutiert.
Es stellte sich heraus, dass das wesentliche Problem darin bestand, die Zahlen und Werte in der richtigen Reihenfolge in den Taschenrechner einzutippen.
Dieses Problem sind wir in der nächsten Fachrechnungsstunde angegangen.

Das deklarative Wissen sollte nun vorhanden sein, jetzt gilt es die verschiedenen Abläufe zu prozeduralisieren.

f) Literaturverzeichnis:

Die theoretischen Überlegungen stammen aus den Unterlagen des PFM-Kurs BL und den Unterlagen zum Kurs „Schwierigkeiten bei mathematischen Themen – woher sie kommen und was dagegen zu tun wäre“.

g) Die Instrumente

Diese sind bereits in c) enthalten