

# Die Entwicklung von „Fachrechnen vom Kopf auf die Füße gestellt“

---

Hansruedi Kaiser

Dezember 2017

*Dieser Text wurde heruntergeladen von der Website [www.fachrechnen.ch](http://www.fachrechnen.ch). Verweise mit *fachrechnen*: beziehen sich auf weitere Texte, die dort gefunden werden können.*

Über rund 12 Jahre hinweg (2004 bis 2016) ist das Konzept „Fachrechnen vom Kopf auf die Füße gestellt“ herangewachsen (vgl. [www.fachrechnen.ch](http://www.fachrechnen.ch)). Im weitesten Sinn handelte es sich dabei um einen empirischen Forschungsprozess, bei dem ein Produkt immer wieder getestet und weiterentwickelt wurde (Forschung im Modus 2, Gibbons et al. 1994). Kriterium war dabei die Verständlichkeit und Akzeptanz der Konzepte bei Lehrpersonen, so wie die Wirkung in ihrem Unterricht. In beiden Punkten wurden über die Jahre hinweg deutliche Fortschritte gemacht.

Dies hier ist ein Versuch, die grossen Linien dieses Entwicklungsprozesses herauszuarbeiten und wo möglich etwas daraus zu lernen.

## 1 Vorwissen und Vorannahmen (vor 2004)

Entwicklungen beginnen nicht auf der grünen Wiese, sondern vor dem Hintergrund von Konzepten und Vorannahmen, welche in jenem Moment als unproblematisch betrachtet werden (Kaiser 1980). In diesem Fall waren es im Wesentlichen die folgenden:

### 1.1 Integrierendes Modell des Lernens (IML)

Das Integrierende Modell des Lernens (*fachrechnen*:[IML2](#)) ist ein Versuch, das Zusammenspiel verschiedener Arten des Wissens und Denkens darzustellen – darunter die beiden, die Kahneman (Kahneman 2011) als *thinking fast* und *thinking slow* bezeichnet (Kaiser 2005b). Das Modell beschreibt unter anderem, wie beim Lernen die verschiedenen Wissenssysteme zusammenspielen.

Auf dem Hintergrund des IML war zu erwarten, dass für das Lernen im Bereich Fachrechnen vor allem die folgenden drei Wissenssysteme von Bedeutung sind:

- **Deklaratives System: Konzepte, Theorien, Daten** (bspw. der Satz des Pythagoras)
- **Situatives System: Erinnernte Situationen** (bspw. Erinnerungen daran, wie ich einmal versucht habe, mit Hilfe des Satzes des Pythagoras die Rechtwinkligkeit einer Mauerecke zu überprüfen)
- **Prozedurales System: Kognitive Prozeduren** (bspw. schriftliches Wurzelziehen)

Zudem ergeben sich daraus Erwartungen für die Lernprozesse. Etwa, dass das Kennenlernen des Satzes des Pythagoras als deklaratives Konstrukt nicht genügt, um dieses Wissen auch gebrauchen zu können. Dazu muss dieses Wissen zusätzlich *situiert* werden (*fachrechnen*:[Konsequenzen für das Lehren](#); Kaiser 2005b).

### 1.2 Situierte Kompetenzen

Das Konzept der Situierten Kompetenz (*fachrechnen*:[Situierte Kompetenz](#); Kaiser, 2005a) ist eine Ableitung aus dem *IML*. Es definiert eine Kompetenz als die Fähigkeit, eine bestimmte Klasse von Situationen bewältigen zu können (Le Boterf 1998). Bspw. kann man die Fähigkeit, die Rechtwinkligkeit einer Mauerecke zu überprüfen, als Kompetenz in diesem Sinn verstehen.

Wie bereits aus dem *IML* ergibt sich aus dem Konzept der *Situierten Kompetenz* ebenfalls die Erwartung, dass jemand über diese Kompetenz erst verfügen wird, wenn er mit verschiedenen realen – also nicht nur auf Papier und Bleistift basierenden – Exemplaren der Situation „Rechtwinkligkeit

einer Mauerecke überprüfen“ Erfahrungen gesammelt hat. Erst aus diesen Erfahrungen ergeben sich Ideen, wie die Situation praktisch bewältigt werden kann und wie abgeschätzt werden kann, ob das Resultat in etwa stimmt.

### 1.3 Situieren mit Compad

Seit 1999 hatten verschiedene Versuche stattgefunden, den Lernenden das Verstehen mehr oder weniger komplexer Zusammenhänge zu erleichtern, indem wir sie anleiteten, diese Zusammenhänge mit Hilfe von Spielmaterialien wie Klötzen, Knöpfen, Männchen etc. zu modellieren (Grassi & Künzel, 2010). Entstanden sind daraus die Lernmaterialien-Kästen *Compad* und *flemo*.

Auf dem Hintergrund der damit gemachten Erfahrungen war zu erwarten, dass auch beim Fachrechnen ein solch handfestes Modellieren (*fachrechnen:handfestes Modellieren*; Kaiser 2009) den Lernenden helfen würde, Zusammenhänge besser zu verstehen.

### 1.4 Alltagsmathematik

Aus der Literatur war bekannt, dass nicht alle, die in der Schule nicht rechnen können, damit auch im beruflichen und privaten Alltag Schwierigkeiten haben. Bspw. beschreibt Herndon (Herndon 1971) einen Schüler, der im Unterricht sehr schwach im Rechnen ist, aber in seiner Freizeit in einem Bowling Zentrum arbeitet und dort für zwei Bahnen gleichzeitig den Punktestand nachführt. Klassisch sind in diesem Zusammenhang auch die Studien von Carraher et al. (Carraher 1991; Nunes, Schliemann, & Carraher 1993). Sie beschreiben etwa Kinder, die in der Schule nicht rechnen können, aber als Strassenverkäufer keine Probleme haben, Preise zu berechnen und Wechselgeld herauszugeben. Und umgekehrt beobachten sie erfahrene Bauarbeiter, die im schulischen Kontext so absurde Resultate wie 4 cm breite Zimmer produzieren.

### 1.5 Mathematikdidaktik

Meine Vorkenntnisse in Mathematikdidaktik waren gering bis inexistent. Sie haben sich erst im Laufe des Projekts entwickelt – durch Lektüre, durch die Teilnahme an einem Masterprogramm zur Mathematikdidaktik und im Austausch mit gut zwei Dutzend Mathematikdidaktikerinnen und Mathematikdidaktikern.

### 1.6 Kursaufbau

Fachrechnen an einer Berufsfachschule zu geben ist ebenfalls eine *Situierte Kompetenz*. Sie kann nur entstehen, wenn die Lehrpersonen mit neuen Ideen in realen Unterrichtssituationen Erfahrungen sammeln. Und wenn sie diese neuen Erfahrungen zusammen mit bereits vorhandenen reflektieren. Ein wirksamer Kurs muss daher auf jeden Fall Gelegenheiten bieten, um sowohl Erfahrungen zu sammeln wie auch Erfahrungen zu reflektieren.

## 2 Konstanten

In ein paar Punkten sind diese Vorannahmen stabil geblieben und haben sich über die Jahre kaum verändert:

### 2.1 Annahmen über die Ursache der Schwierigkeiten der Lernenden

Ausgangspunkt der gesamten Entwicklung war die sich immer wieder wiederholende Klage von Lehrpersonen, dass ihre Lernenden „nicht mehr rechnen können“.

Diese Klage ist alt. Bereits 1912 stellte das *Board of Education* in London fest: "There is a prevailing opinion that London children are slower and less accurate in computation than they were ten years

ago." (Anderson 1999). Dass sich die Klage so lange unverändert erhalten hat – obwohl sich die Mathematikdidaktik unterdessen stark entwickelte und die Lernenden in der Schweiz im entsprechenden PISA Test immer ausserordentlich gut abschneiden – lässt vermuten, dass die Ursache der Schwierigkeiten nicht beim lückenhaften Vorwissen der Lernenden liegt. Vermutlich sind es eher unrealistische Erwartungen der Lehrpersonen, welche sie zu dieser Klage veranlassen.

Die Entwicklung ging daher von der Annahme aus, dass das Hauptproblem nicht fehlende Ressourcen – d.h. Rechenfertigkeiten – sind, sondern dass die Schwierigkeiten v.a. dadurch entstehen, dass die Lernenden mit neuen Situationen konfrontiert werden, in denen sie die vorhandenen Ressourcen gebrauchen sollten. Diesen Gebrauch müssen sie für jede neue Situation zuerst lernen. Entsprechend war es das Hauptziel der Entwicklung, eine Didaktik des Zahlengebrauchs im beruflichen Umfeld zu entwerfen und diese an Lehrpersonen weiterzugeben.

Pragmatisch gesehen ist dies auch die einzig mögliche Haltung, welche den Lehrpersonen überhaupt einen Spielraum lässt. Tatsächlich vorhandene Lücken bei den rechnerisch/mathematischen Ressourcen können in den wenigen an den Berufsfachschulen zur Verfügung stehenden Stunden nicht geschlossen werden. Den Lehrpersonen bleibt gar nichts anderes übrig, als bezüglich des vorhandenen Vorwissens optimistisch zu sein, wenn sie nicht resignieren wollen.

Diese Ausrichtung blieb während der ganzen Entwicklung bestehen. Und die Annahme, dass die Lernenden genügend Vorwissen mitbringen, darf dank des Erreichten unterdessen als implizit bestätigt gelten.

## 2.2 Aufbau der Kurse

Im Laufe der Entwicklung fanden immer wieder Kurse mit Lehrpersonen statt. Die im Rahmen dieser Kurse gesammelten Erfahrungen prägten die Entwicklung wesentlich. Der grobe Ablauf dieser Kurse ist ziemlich konstant geblieben und umfasste immer folgende Elemente:

**Einstieg:** Eine Gruppenarbeit, die dazu dient, das Vorwissen (Erfahrungen, Meinungen, Haltungen und Konzepte der Lehrpersonen) sichtbar und bearbeitbar zu machen.

**Inhaltliche Inputs:** Frontale Präsentationen meinerseits.

**Übungen:** Immer wieder im Ablauf eingestreute Übungen zur Verständnissicherung.

**Gelegenheiten, um Erfahrungen zu sammeln:** Ein Auftrag an die Lehrpersonen, irgendeine im Kurs behandelte Idee in ihrem Unterricht versuchsweise umzusetzen. Die damit gemachten Erfahrungen werden dann im Plenum vorgestellt und kritisch diskutiert.

## 3 Vorher – die frühen Kurse

Um die Entwicklung sichtbar zu machen, hier als erstes je eine zusammenfassende Darstellung eines Kurses ganz zu Beginn der Entwicklung und eines Kurses gegen Ende des ganzen Prozesses.

Wie schon erwähnt, stand bereits am Anfang die Überzeugung, dass die Schwierigkeiten der Lernenden nicht das Resultat grosser Lücken sind. Ihre Schwierigkeiten sind vielmehr die Folge davon, dass sie ihre Ressourcen im Bereich Mathematik und Rechnen in neuen Situationen gebrauchen müssen. Die Hauptaufgabe der Lehrperson ist es, die Lernenden dabei zu unterstützen, diesen situierten Ressourcengebrauch zu erlernen.

Zentrale Inhalte der ersten Kurse waren verschiedene theoretische Modelle. Diese sollten den Lehrpersonen einerseits helfen, zu verstehen, woher die Schwierigkeiten der Lernenden (und meine Überzeugung dazu) kommen. Andererseits sollten sie es den Lehrpersonen ermöglichen, eine geeignete Didaktik abzuleiten. Zudem erhielten die Lehrpersonen ein umfangreiches Skript mit ca. sechs Fachartikeln als Hintergrundlektüre.

Das Programm dieser ersten Kurse sah etwa wie folgt aus (jeder Tag entspricht einem ganzen Kurstag von ca. 6 Stunden):

Tag	Inhalte
1	<p><i>Gruppenarbeit zum Einstieg:</i> Die Lehrpersonen sammeln in Gruppen Erfahrungen und Erklärungsversuche zu den Schwierigkeiten, welche ihre Lernenden beim Bearbeiten von mathematischen Aufgaben zeigen. Die Resultate der Gruppen werden im Plenum gesammelt und besprochen.</p> <p><i>Input 1:</i> Die spezielle Sprache von Mathematikaufgaben: Wenn das Problem gar nicht bei der Mathematik, sondern beim Sprachverstehen liegt – <b>Schematheorie des Sprachverstehens</b>.</p> <p><i>Übung 1:</i> Was könnte man bezüglich dieser Schwierigkeit tun? Umsetzungsideen entwerfen, Umsetzung planen.</p>
2	<p>Selbsterfahrung beim Bearbeiten von ein paar mathematischen Aufgaben:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Stelle als Formel dar „Es gibt fünfmal so viele Studierende wie Professoren“.</li> <li>• „Je mehr Gäste kommen, umso mehr Spaghetti muss ich kochen“ (einfache Proportionalität) lässt sich graphisch als ansteigende Gerade durch den Nullpunkt darstellen. Wie sieht die Graphik aus für „Je schneller der Zug fährt, umso schneller ist er am Ziel“?</li> </ul> <p><i>Input 2:</i> <b>Die Drei Welten:</b> Bei der Arbeit mit mathematischen Modellen ist das Problem nicht die Manipulation des Modells (bspw. der Formel), sondern der Aufbau und die Interpretation des Modells.</p> <p><i>Input 3:</i> Eigenarten der mathematischen Formelsprache: Ein Minuszeichen hat je nach Kontext eine ganz andere Bedeutung.</p> <p><i>Übung 2:</i> Was könnte man tun? Umsetzungsideen entwerfen, Umsetzung planen.</p>
3	<p><i>Umsetzungsversuche besprechen:</i> Zwei, drei erste Berichte von Teilnehmenden.</p> <p><i>Input 4:</i> Beispiele aus der Literatur zu Schwierigkeiten, welche Lernende (auf der Primarstufe) mit Erstellen und Interpretieren mathematischer Modelle haben (bspw. „Auf dem Schiff sind 23 Schafe und 12 Kühe. Wie alt ist der Kapitän?“ &gt;&gt;&gt; „35!“)</p> <p><i>Input 5:</i> <b>Das IML</b> als lerntheoretische Grundlagen: Das Zusammenspiel von Erfahrung und Instruktion macht Lernen erst möglich.</p> <p><i>Übung 3:</i> Was hat das für Konsequenzen? Umsetzungsideen entwerfen, Umsetzung planen.</p>
4	<p><i>Umsetzungsversuche besprechen:</i> Zwei, drei weitere Berichte.</p> <p><i>Input 6:</i> Als praktisches Instrument eine Anleitung in 4 Schritten, um die Arbeit mit den Drei Welten vorzubereiten.</p> <p><i>Input 7:</i> <b>Cognitive Apprenticeship</b> als didaktisches Modell: Theorie und eine Demolektion zum Thema „Mit Schulnoten rechnen (Mittelwert und Median)“</p> <p><i>Übung 4:</i> Was könnte man tun? Umsetzungsideen entwerfen, Umsetzung planen.</p> <p><i>Input 8:</i> <b>Reziprokes Lehren und Lernen</b> als didaktisches Modell, um selbstständiges Lernen und Arbeiten zu fördern</p> <p><i>Übung 5:</i> Arbeitsschritte für Reziprokes Lehren und Lernen entwerfen</p>
5	<p><i>Umsetzungsversuche besprechen:</i> Die Mehrheit der Berichte.</p> <p><i>Input 9:</i> Zusammenfassung durch den Dozenten: Systematischer Überblick über Ursachen und Interventionsmöglichkeiten</p> <p><i>Übung 6:</i> Zusammenfassung durch die Lehrpersonen: In Gruppen gemeinsamer Entwurf eines kleinen Leitfadens.</p>

Der Erfolg dieser ersten Kurse war sehr bescheiden. Während den Präsenzveranstaltungen war viel Widerstand oder auch einfach nur Verwirrung bei den Lehrpersonen zu spüren. Und auch die Umsetzungsversuche wollten nicht so recht gelingen. Von einem dieser ersten Kurse lassen sich neun solche Versuche rekonstruieren. Zwei davon waren inspirierend und anregend und haben es sogar in das Buch *Rechnen und Mathematik anwendungsbezogen unterrichten* geschafft (Kaiser 2010: *Tangens für Zimmerleute*, S. 79f. und *Stabteilung*, S. 149ff). Die restlichen sieben endeten dagegen alle in mehr oder weniger grossen Misserfolgen, verbunden mit etlicher Frustration. Ein Teilnehmer weigerte sich sogar explizit, überhaupt etwas von den behandelten Inhalten auszuprobieren, denn: „Wenn man den Ideen der Lernenden nachgehen würde, würde sie das nur verwirren. Sie brauchen ein klares Bild, das sich einprägt.“

#### 4 Nachher – die späten Kurse

Eine augenfällige und wesentliche Verschiebung von den ersten zu den letzten durchgeführten Kursen ist eine Verlagerung des Gewichts von den Hintergrundtheorien zu den didaktischen Modellen. Zudem treten an die Stelle der ausführlichen Theoriedarstellungen Beispiele, welche gewisse Phänomene direkt erlebbar machen. Als Hintergrundinformation zur Vertiefung einzelner Inhalte dient v.a. das umfangreiche Material unter [www.fachrechnen.ch](http://www.fachrechnen.ch).

Der typische Ablauf dieser Kurse der letzten Phase sah etwa wie folgt aus (jeder Tag entspricht einem Nachmittag von ca. 3 Stunden):

Tag	Inhalte
1	<i>Gruppenarbeit zum Einstieg</i> : Entwurf einer Unterrichtseinheit zum Fachrechnen. Die Resultate der Gruppen werden im Plenum besprochen und bleiben als Bezugsmöglichkeit während des ganzen Kurses hängen. <i>Input 1</i> : „Mathematik betreiben“ und „Zahlen gebrauchen“ in Analogie zu „Linguistik betreiben“ und „Hören/Sprechen/Lesen/Schreiben.“
2	<i>Input 2</i> : <b>Zahlen gebrauchen als situierte Kompetenz</b> : Situiertes Wissen, Dividieren als situierte Kompetenz, Prozentrechnen situiert und die Probleme beim Wechsel der Situation <i>Input 3</i> : Konsequenzen für die Didaktik: Von unten aus der Situation heraus arbeiten; Tangens für Zimmerleute als Beispiel <i>Input 4</i> : Bewertung der Entwürfe von Tag 1 auf diesem Hintergrund durch den Dozenten
3	<i>Input 5</i> : Die <b>Acht Schritte</b> als didaktisches Modell <i>Input 6</i> : Bewertung der Entwürfe von Tag 1 auf diesem Hintergrund durch den Dozenten <i>Übung 1</i> : In Gruppen eine Unterrichtseinheit nach dem Modell der <i>Acht Schritte</i> entwerfen: Situation, professionelles Vorgehen, Einstiegsaufgabe. Die Resultate der Gruppen werden im Plenum besprochen. <i>Input 7</i> : Kurzer Hinweis auf alltagstaugliche mathematische Werkzeuge
4	<i>Input 8</i> : Die Voraussetzungen, damit <i>Acht Schritte</i> Sinn macht <i>Input 9</i> : <b>Horizontaler Transfer</b> um die Lernenden zu unterstützen, vorhandenes Wissen zu nutzen: Theorie und eine Demolektion zum Thema „Wie gut muss ein Eintrittstest sein, damit er nützlich ist?“ <i>Übung 2</i> : Zeit, um Umsetzungsversuche zu planen
5	<i>Input 9</i> : Die spezielle Sprache von Sätzlirechnungen <i>Übung 3</i> : Eigene (Prüfungs-)Aufgaben umschreiben <i>Input 10</i> : Gleichheitszeichen, Bruchstrich: Mehrdeutigkeit bei der mathematischen Notation
6	<i>Umsetzungsversuche besprechen</i> (dazu spontan theoretische Einschübe nach Bedarf, bspw. <b>Handfestes Modellieren</b> kurz angetippt)
7	<i>Umsetzungsversuche besprechen</i> (dazu spontan theoretische Einschübe nach Bedarf)

Der Erfolg ist deutlich besser geworden. Widerstände dagegen, das vorgeschlagene Modell der *Acht Schritte* einmal selbst im Unterricht auszuprobieren, sind verschwunden. Die Umsetzungen sind zwar erwartungsgemäss erkennbare Anfängerprodukte. Sie werden aber alle von den Lehrpersonen als ermutigende Schritte in eine vielversprechende Richtung erlebt. Die meisten Lehrpersonen berichten begeistert, wie gut und motiviert ihre Lernenden gearbeitet haben.

## 5 Verschiedene Entwicklungslinien

Die Veränderungen, welche sich im Laufe der Entwicklungsarbeit ergeben haben, sind fundamentaler, als vielleicht der Vergleich des Aufbaus der frühen und der späten Kurse erkennen lässt. Es lassen sich verschiedene Entwicklungslinien beschreiben.

### 5.1 Angebot an die Lehrpersonen

Wie erwähnt, fand eine markante Verschiebung der Inhalte von Hintergrundtheorien zu didaktischen Modellen statt. Es lassen sich drei Phasen unterscheiden:

#### 1. *Analysemodelle*

In einer ersten Phase präsentierte ich den Lehrpersonen verschiedene Modelle, die ihnen helfen sollten, die Schwierigkeiten der Lernenden zu verstehen. Diese Modelle waren im Wesentlichen das IML (*fachrechnen:IML* und dort vor allem *fachrechnen:Das Zusammenspiel von Erfahrung und Instruktion*), die Drei Welten (*fachrechnen:Drei Welten*) und (für das Thema Sätzlirechnungen) das Modell des schemabasierten Sprachverstehens (*fachrechnen:Modell des schemabasierten Sprachverstehens*, bspw. Kintsch & vanDijk 1978).

Das IML und das *Modell des schemabasierten Sprachverstehens* waren feste Bestandteile meines Vorwissens, bei denen für mich die Herausforderung v.a. darin bestand, sie für den Kontext Fachrechnen nutzbar zu machen.

Das Modell der *Drei Welten* habe ich extra auf diese ersten Kurse hin entwickelt. Es ging mir dabei vor allem darum, versuchsweise das „Rechnen“ und den „Rest“ auseinander zu halten. Im Wesentlichen beschreibt das Modell einen Prozess, bei dem die Rechnenden zuerst aus der realen Problemsituation heraus ein passendes numerisches Modell entwickeln, dann dieses Modell manipulieren und schliesslich das gefundene Resultat wieder im Rahmen der realen Problemsituation interpretieren. Später zeigte sich, dass sich diese spontane Idee mit dem mathematikdidaktischen Konzept des *Modellierungskreislaufs* deckt (bspw. Maaß 2005).

Daraus ergab sich das Bild dreier Welten, welche die „Rechnenden“ bei der Bearbeitung eines realen Problems koordinieren müssen: 1) Die Welt der reale Dinge und Zusammenhänge, 2) die Welt der mathematischen Zusammenhänge und 3) die Welt der manipulierbaren Zahlen (*fachrechnen:Drei Welten*; auch Kaiser 2009). Die Hauptbotschaft an die Lehrpersonen in dieser ersten Phase war, dass die eigentliche Schwierigkeit der Lernenden nicht bei der Manipulation in der dritten Welt (dem „Rechnen“ im engeren Sinn) liegen, sondern bei der Anforderung, alle drei Welten zur Deckung zu bringen. Unter dieser Annahme lassen sich bspw. absurde Resultate wie dieses erklären, dass erfahrene Bauarbeiter 4 cm breite Zimmer errechnen (Nunes et al. 1993).

Dass ich den Lehrpersonen v.a. solche – nach meiner Meinung sehr nützliche – theoretischen Modelle anbot und es dann weitestgehend ihnen überliess, daraus praktische Schlussfolgerungen für ihren Unterricht zu ziehen, war zu einem guten Teil dadurch bedingt, dass ich noch nichts anderes anzubieten hatte. Einerseits waren mir kaum passende didaktische Modelle bekannt und andererseits war ich zu wenig mit Unterrichtsrealität der Lehrpersonen vertraut, als dass ich die allgemeinen Modelle hätte dafür anpassen können. Die angebotenen Modelle und meine daraus resultierenden Überzeugungen waren ein Einstieg in einen Entwicklungsprozess, in dessen Verlauf im

Zusammenspiel mit den unterrichtlichen Erfahrungen der Lehrpersonen und meinem Hintergrund erst geeignete Werkzeuge entstehen mussten.

Im Kleinen lässt sich dieser Versuch einer Ko-Konstruktion beim Ablauf des dem Thema Sätzlirechnungen gewidmeten Tages eines Kurses von 2007 beobachten. Als Input präsentierte ich den Lehrpersonen zuerst die Grundideen des *schemabasierten Sprachverstehens*. Als Übung hatten sie dann die PISA Aufgabe „*Grippe*“ darauf hin zu analysieren, welche Schemata Lesende hier vermutlich aufzubauen haben und welche Schwierigkeiten sie dabei vermutlich antreffen. Als zweites präsentierte ich ihnen als didaktisches Modell das Modell des *Reziproken Lehrens* (*reciprocal teaching*, Palincsar & Brown 1989). Die Lehrpersonen erhielten dann den Auftrag, als Ersatz für das von Palincsar & Brown verwendete schrittweise Vorgehen für verständnisförderndes Lesen ein Vorgehen zur schrittweisen Bearbeitung von Mathematikaufgaben zu entwerfen (für ein ausgearbeitetes Beispiel s. Reilly, Parsons, & Bortolot 2009).

Die Kursteilnehmenden waren mit beiden Aufgaben (Analyse der PISA Aufgabe und Entwurf eines Vorgehens zur Bearbeitung der Rechenaufgaben) ziemlich überfordert. Ihre Versuche ergaben aber wertvolle Einblicke in das Denken und die analytischen Fertigkeiten typischer Berufsschullehrpersonen. Glücklicherweise stand am Anfang der Entwicklung viel Zeit zur Verfügung (jeweils fünf volle Kurstage), so dass es möglich war, solche Aufträge im Kurs durchzuspielen und entsprechende Erfahrungen zu sammeln.

Eine wesentliche Erkenntnis aus den ersten Kursdurchführungen war ein Gefühl dafür, wie gross der Schritt vom Input im Kurs zur Umsetzung im Unterricht sein darf. In den ersten Kursen war er definitiv zu gross.

## 2. Lernumgebungen

Neben den Kursen fanden auch Entwicklungsarbeiten in Zusammenarbeit mit einzelnen Berufen statt, welche ihr Fachrechnen überarbeiten wollten. Eine erste Anfrage in diese Richtung kam 2009 von den Köchen/Köchinnen EFZ. Eine zweite folgte 2011 von den Milchtechnologien/Milchtechnologinnen EFZ. Dazu kamen ein paar schulinterne Arbeitsgruppen, welche im kleineren Rahmen etwas verändern wollten (Haustechniker/Haustechnikerinnen, Bodenleger/Bodenlegerinnen etc. vgl. *fachrechnen: [Analyse ganzer Berufe](#)*).

In einer zweiten Phase versuchte ich mit Hilfe der Entwicklung von Lehrmitteln eine Ebene von Hilfestellungen zu erreichen, die näher am Schulalltag war als die bisher in den Kursen eingesetzten theoretischen Modelle. Die entwickelten Lehrmittel nahmen die Form von Lernumgebungen an (Hirt & Wälti 2008), eine Art Arbeitsblätter, die ein selbstständiges, exploratives Lernen anregen (bspw. *fachrechnen: [Rezeptangaben umrechnen](#)*). Zur Erstellung dieser Lernumgebungen mussten zwei Fragen geklärt werden, die sich aus der Grundannahme ergeben, dass der Gebrauch mathematisch/rechnerischer Ressourcen situationsspezifisch ist: 1) Welche Situationen treffen die Lernenden an? 2) Welches sind die für die Bewältigung dieser Situation adäquaten rechnerisch/mathematischen Werkzeuge?

Im Rahmen der ersten Kurse war beim Versuch, den Lehrpersonen zu helfen, den Graben zwischen theoretischem Modell und Handeln im Unterricht zu überbrücken, eine kleine Anleitung unter dem Titel „Arbeiten mit den drei Welten“ entstanden, welche die Beantwortung dieser beiden Fragen als zwei wichtige Schritte darstellte. Bei der Entwicklung der Lernumgebungen wurden diese Fragen nun im Team angegangen, beantwortet und in Form der Lernumgebungen festgehalten. Jede Lernumgebung hat eine Situation zum Thema und behandelt die in diesem Zusammenhang praxistauglichen Werkzeuge. Für die Köchinnen/Köche EFZ bspw. wurden sieben Situationen gefunden (*fachrechnen: [Küche](#)*), in denen mit Zahlen gearbeitet wird. Und als praxistaugliches Werkzeug wird meistens die Arbeit mit Tabellen bzw. parallelen Skalen empfohlen (*fachrechnen: [Tabellen statt Formeln](#)*).

In den Kursen dieser mittleren Phase stand entsprechend das Erstellen solcher Lernumgebungen im Zentrum. Das *IML* und die *Drei Welten* waren als Hintergrundtheorie zwar noch präsent, nahmen

aber deutlich weniger Platz ein. Im Grunde genommen reduzierte sich der theoretische Input auf die Darstellung des Kontrastes zwischen den *deklarativen* und dem *situativen Wissenssystem* und der Ableitung, dass im Zentrum von (rechnerisch/mathematischer) Handlungskompetenz *situatives Wissen* steht. Als Beispiele dafür, wie dies im Unterricht berücksichtigt werden kann, konnte ich auf die bereits erarbeiteten Lernumgebungen (v.a. die der Köchinnen und Köche) zurückgreifen. Und als eine Hauptaktivität im Kurs entwickelten die Teilnehmenden für den eigenen Bedarf ebenfalls solche Lernumgebungen. Sie hatten dazu zuerst eine Liste aller relevanten Situationen ihres Berufes zu erstellen. Dann mussten sie das jeweils praxistaugliche Werkzeug für jede Situation wählen. Und am Schluss hatten sie Zeit, einige Lernumgebungen auszuarbeiten.

Diese Veränderung im Kursinhalt wirkte sich positiv auf die Akzeptanz bei den Lehrpersonen aus. Mit den Lernumgebungen standen für viele überzeugende Beispiele dafür zur Verfügung, was situationsorientierter Unterricht bedeuten könnte. Entsprechend waren sie eher bereit, sich auf meine Ideen einzulassen.

Es zeigte sich aber bald, dass die Lehrpersonen auch mit diesem Zugang überfordert waren. Erstens war das Zusammenstellen aller Situationen eines Berufes ausserhalb der Möglichkeiten einer einzelnen Lehrperson. Dazu benötigt eine kleine Arbeitsgruppe etwa ein halbes Jahr. Zweitens erwies es sich für sie als äusserst schwierig, für die einzelnen Situationen die schulischen Rechenwerkzeuge hinter sich zu lassen und durch praxistaugliche zu ersetzen. Und zum dritten fehlte ihnen immer noch ein geeignetes didaktisches Modell, um die erarbeiteten Lernumgebungen auch sinnvoll einzusetzen. Eindrücklich illustriert das die Aussage „Ich war wirklich enttäuscht!!“ im Arbeitsjournal zweier junger Lehrer (*fachrechnen:Arbeitsjournal*, S.11 unten). (Die erste noch nicht ganz vollständige Version der *Acht Schritte* – Seite 16/17 im Arbeitsjournal – ist ad hoc entstanden, um dieser Enttäuschung entgegen zu wirken.)

Dieser dritte Punkt war auch die Schwäche der für die Köchinnen und Milchtechnologien erarbeiteten Lernumgebungen. Diese Lernumgebungen können zwar im günstigen Fall eine echte Auseinandersetzung mit den Gebrauchsproblemen der Lernenden in deren beruflichem Alltag fördern. Sie können von Lehrpersonen aber auch genutzt werden, um sich dahinter zu verstecken und genau dieser Auseinandersetzung zu entgehen. (Die erste Ausgabe des Lehrmittels [mathbu.ch](http://mathbu.ch), das ebenfalls auf einen Lernumgebungs-Konzept beruht, kämpfte mit ähnlichen Schwierigkeiten; persönliche Mitteilung Annegret Nydegger 2010.)

### **3. Ein didaktischer Ablauf**

Neben Kursen für Lehrpersonen an Berufsfachschulen und der Erarbeitung von Lernumgebungen lief noch eine weitere, dritte Entwicklungsschiene. In Zusammenarbeit mit dem SVEB (Dachorganisation der Institutionen der Erwachsenenbildung in der Schweiz) ergab sich die Möglichkeit, Konzepte zur Förderung alltagsmathematischer Kompetenzen im Bereich Rechnen/Mathematik zu entwickeln. Z.T. bestand die Arbeit darin, Kurse für Kursleitende anzubieten, die mit geringqualifizierten Erwachsenen arbeiteten (bspw. Grämiger & Kaiser 2011). Und diese Kurse trugen ebenso zur gesamten Entwicklung bei wie die Kurse mit den Lehrpersonen aus der Berufsbildung.

Darüber hinaus war es in einzelnen Projekten möglich, direkt mit geringqualifizierten Personen zu arbeiten. Dabei zeigte sich, dass eine Didaktik, welche unmittelbar in den Erlebnissen der Lernenden mit bestimmten beruflichen Handlungssituationen verankert ist, möglich und wirksam ist.

Auf Grund aller gemachten Erfahrungen rückten in einer dritten Phase der Entwicklung ganz konkrete didaktische Modelle ins Zentrum. Einerseits war für mich deutlich geworden, dass dies das war, was für die Lehrpersonen am nützlichsten war. Und andererseits schälte sich auch langsam ein griffiges Modell heraus. Dazu beigetragen haben die eigenen Versuche, aber vor allem die kritischen Reflexionen der Umsetzungsversuche von weit über 100 Lehrpersonen.

Ein Treiber bei dieser Entwicklung war auch, dass die für einzelne Kurse zur Verfügung stehende Zeit immer kürzer wurde. Sieben volle Kurstage (als Teil eines noch viel umfangreicheren Weiterbildungskurses) lassen sich heute nicht mehr verkaufen. Manche Kunden wollen nicht mehr

als einen halben Tag investieren. Dadurch wurde der Druck immer grösser, etwas anzubieten, das bereits nach dieser kurzen Zeit Wirkung zeigt.

In seiner Schlussform hat das didaktische Modell die Form der Acht Schritte (*fachrechnen:Acht Schritte*) angenommen (s.u. Punkt 5.5). Als Kurzform, die tatsächlich schon nach nur einem Kursnachmittag Veränderungen im Unterricht der Lehrpersonen bewirken kann, reduziert es sich auf folgenden Vorschlag: Arbeiten Sie im Unterricht nicht mit selbst entwickelten Beispielen/Aufgaben, sondern setzen Sie Beispiele ein, welche die Lernenden aus dem Betrieb mitbringen (*fachrechnen:Die Lernenden als Quelle von Aufgaben*).

## 5.2 Theoriebezug

Auch wenn sich der Schwerpunkt von Theorien als Analyseinstrumente hin zu didaktischen Modellen verschob, sind theoretische Inputs als erklärender Hintergrund zu den didaktischen Modellen nie ganz verschwunden. Typischerweise ist der Tag 2 der späten Kurse (vgl. Punkt 4) eine Art Vorlesung, bei der die Schwierigkeiten der Lernenden theoretisch erklärt und die Anforderungen an die Didaktik abgeleitet werden.

Verschoben hat sich aber die Darstellung der Theorien. Am Anfang standen relativ ausführliche Darstellungen des IML, der Drei Welten und der Schematheorie des Sprachverstehens (*fachrechnen:IML, Drei Welten, Schematheorie des Sprachverstehens*). Ich versuchte einen gewissen Detaillierungsgrad zu erreichen, der mir notwendig schien, um gesicherte Konsequenzen für den Unterricht abzuleiten. Diese detaillierte Darstellung der Theorie wurde mit der Zeit vollständig ersetzt durch drei gute, suggestive Beispiele, welche es den Lehrpersonen ermöglichen, selbst Erfahrungen zu machen, die sich dann mit zwei, drei Sätzen in ein grobes theoretisches Gerüst einordnen lassen. Die Grundhaltung dahinter ist dieselbe wie diejenige der *Acht Schritte*: Den teilnehmenden Lehrpersonen Erfahrungen ermöglichen, welche bei ihnen zu Fragen führen, auf die dann die Theorie eine Antwort geben kann.

Die Beispiele sind:

1. Der *Wason Selection Task* als auslösende Erfahrungen für die Bedeutung situierter Vorerfahrungen.
2. Eine Demonstration dazu, unter welchen Umständen die Division  $4 : \frac{1}{2}$  Mühe macht und wann sie problemlos bewältigt wird. Damit lässt sich erleben, dass auch der Gebrauch von scheinbar kontextfreien Rechenfertigkeiten situiert ist und dass somit auch Rechenfertigkeiten nicht einfach transferierbar sind.
3. Die Aufforderung, doch schnell die Anzahl Übernachtungen auszurechnen, wenn man am 2. März anreist und am 7. März wieder abreist. Die Reaktion der Teilnehmenden zeigt, dass auch gestandene Lehrpersonen in gewissen Situationen noch mit den Fingern rechnen, dass somit sogar die Kompetenz „Subtrahieren im kleinen Eins-Plus-Eins“ situationsgebunden ist.

Als Modell für das, was beim Gebrauch von Zahlen und Rechenfertigkeiten in realen beruflichen Handlungssituationen geschieht, diente in den ersten Kursen das Modell der *Drei Welten*. Dies wurde im Wesentlichen abgelöst durch die viel weniger differenzierte Aussage, dass neben den *Rechenfertigkeiten* für jede Klasse von Situationen auch spezifisches *Gebrauchswissen* benötigt wird und dass dieses Wissen für jede dieser *Situationsklassen* neu erlernt werden muss. Woraus dieses *Gebrauchswissen* besteht, wird offen gelassen. Der theoretische Rahmen hat sich also von einer detaillierten kognitionspsychologischen Darstellung von Denkprozessen hin zu einer groben binären Einteilung in *Rechenfertigkeiten* und *Gebrauchswissen* verschoben. Dies scheint einerseits das Auflösungs-niveau zu sein, welches für die Lehrpersonen in der Berufsbildung nützlich ist und welches sich auch mit ihren persönlichen Erfahrungen verknüpfen lässt. Andererseits ist die Darstellung so auch ehrlicher, da bspw. gerade für das *Gebrauchswissen* keine detaillierten kognitionspsychologischen Konzepte existieren.

Parallel zu dieser Verschiebung veränderte sich der Einsatz von Fachartikel etc. in den Kursen. Wie geschildert, erhielten die Lehrpersonen in den ersten Kursen eigentliche Reader mit verschiedenen, für mich inspirierenden Fachartikeln (*fachrechnen:Meine Lieblingstexte*), deren Lektüre obligatorisch war. Dies wurde abgelöst durch einfache Hinweise auf Material v.a. auf [www.fachrechnen.ch](http://www.fachrechnen.ch), dessen Konsultation freiwillig und v.a. für Interessierte gedacht ist.

### 5.3 Analyseeinheiten

Interessant ist, dass ich trotz der Bedeutung des Konzepts der Situation und der *Situierten Kompetenzen* in meinen Vorannahmen (vgl. Punkt 1) in den ersten Kursen immer von „Aufgaben“ und „Stoffgebieten“ gesprochen habe. Offenbar brauchte ich selbst einige Zeit, bis ich mich von der üblichen Terminologie des Rechenunterrichts lösen konnte. Erst im Zusammenhang mit der Arbeit an den Lernumgebungen rückten konsequent *Situationen* (*Berechnungssituationen*, *berufliche Handlungssituationen*) als Einheit ins Zentrum.

### 5.4 Der Einsatz von Beispielen

Parallel zur Verschiebung von *Aufgaben* zu *Situationen* veränderte sich auch der Charakter der Beispiele, die ich zur Veranschaulichung nutzte oder an denen ich die Lehrpersonen im Unterricht arbeiten liess. Am Anfang waren dies Fallbeispiele aus der Literatur, welche mich beeindruckt hatten – v.a. Beispiele aus den Büchern von Stella Baruk (Baruk 1985, 1989, 2004), aber auch Aufgaben aus den PISA Untersuchungen etc. Gegen Ende wurden diese Beispiele vollständig ersetzt. An ihre Stelle traten teilweise Beispiele aus Umsetzungsarbeiten von Lehrpersonen. Meistens erhielten die Lehrpersonen in den Kursen aber ganz einfach den Auftrag, ad hoc Beispiele aus ihrem eigenen Unterricht beizusteuern. Im Sinne eines Doppeldeckers setzte sich die konsequente Situationsorientierung der vorgeschlagenen didaktischen Modelle also auch in den Kursen durch.

Der Einsatz von Fallbeispielen aus der Literatur war zu Beginn unumgänglich, da noch keine Beispiele direkt aus dem Erfahrungsbereich der Lehrpersonen zur Verfügung standen. Sie waren für mich zentral, um die Problematik zu verstehen. Sie führten aber bei den Lehrpersonen teilweise zu Widerständen, da sie die Relevanz der Beispiele anzweifeln. Die Verschiebung hin zu eigenen Erfahrungen dürfte wesentlich zum Abbau dieser Widerstände beigetragen haben.

### 5.5 Didaktische Modelle

Von Anfang an habe ich in den Kursen versucht, den Lehrpersonen didaktische Modelle vorzuschlagen. Zum Einsatz kamen *Cognitive Apprenticeship* und *Reciprocal Teaching*. Die Idee mit dem *Reciprocal Teaching* wurde nicht weiter verfolgt (vgl. dazu Punkt 5.6). Hingegen fanden eine ständige Erweiterung und ein Umbau der Grundideen der *Cognitive Apprenticeship* statt.

Die beiden ersten Schritte der *Cognitive Apprenticeship* (*fachrechnen:Neue Verfahren Einüben*) – *Modellieren* und *Coachen*, d.h. *Vormachen* und *Üben Lassen* – stossen bei Lehrpersonen sofort auf Verständnis. Sie entsprechen dem, was Lehrpersonen im Rechenunterricht in ihrem Selbstverständnis schon immer gemacht haben. Und auch das *Coaching*, d.h. dass man die Lernenden beim Üben unterstützt, wird nicht als besonders innovativer Vorschlag wahrgenommen. Erklärungsbedürftig sind hingegen die restlichen drei Schritte – *Artikulieren*, *Reflektieren* und *Explorieren*. In einer ersten Phase versuchte ich diese drei Schritte damit zu begründen, dass die Lernenden beim *Üben* zwar Erfahrungen sammeln, dass diese Erfahrungen aber reflektiert werden müssen, bis sie als gute, situative Wissensbasis zur Verfügung stehen (vgl. *fachrechnen:Strukturierung und Reflexion im IML* als Parallelen zu *Artikulieren* und *Reflektieren*). Diese Erklärung stiess auf begrenztes Interesse. Sie hat kaum eine Lehrperson dazu bewogen, über *Vormachen* und *Üben Lassen* hinauszugehen.

Auf dem Hintergrund des *IML* und der dort angenommenen Dominanz der schon vorhandenen Erfahrungen (*fachrechnen:Wissen gebrauchen*), befürchtete ich von Anfang an, dass bei der *Cognitive*

*Apprenticeship* der direkte Einstieg über das *Modellieren* eine schulische Parallelwelt schafft und dass so erworbenes Wissen als träges Wissen nicht im eigentlichen Handlungskontext, dem beruflichen Alltag, wirksam wird (vgl. auch *fachrechnen:Alte Gewohnheiten loswerden*). Zudem befürchtete ich, dass die Lernenden beim *Modellieren*, wenn dieses unvorbereitet erfolgt, nicht wissen, worauf sie achten sollen, und somit unter Umständen wenig von diesem Modell profitieren. Der resignativen Einschätzung einiger Autoren, dass dies unvermeidlich ist (bspw. VanLehn 1990), wollte ich mich nicht anschließen. Leitend war für mich die Idee, dass es gelingen muss, den Lernenden zu zeigen, auf welche Fragen (die sie selbst haben) das Modell eine Antwort bietet (Holt 2004). Aus diesen Überlegungen heraus erweiterte ich den Ablauf der *Cognitive Apprenticeship* um einen Schritt 0 mit den Teilschritten *Aufgaben lösen lassen, Lösungen und Strategien vergleichen, Offene Fragen herausarbeiten* (*fachrechnen:Neue Verfahren Einüben*; Varianten dieses Schritts 0 werden in der Mathematikdidaktik-Literatur unter dem Begriff *Produktives Scheitern* diskutiert; bspw. Kapur & Bielaczyc 2012).

Beim Versuch *Cognitive Apprenticeship* im Kontext der beruflichen Bildung einzusetzen, war allen Beteiligten schnell klar, dass der letzte Schritt der *Cognitive Apprenticeship* – *Explorieren*, d.h. das gelernte Vorgehen auf andere Anwendungskontexte übertragen – zentral ist. Denn sonst entsteht nur schulisches Wissen und die Wahrscheinlichkeit ist klein, dass dieses Wissen im Betrieb, dem beruflichen Anwendungskontext, aktiv genutzt werden kann. Als zweite Anpassung der *Cognitive Apprenticeship* wurde deshalb dieser fünfte Schritt von *Explorieren* in *Anwendungen im Betrieb diskutieren* umformuliert. Konkret war damit gemeint, dass die Lehrpersonen ihre Lernenden auffordern, das Gelernte im Betrieb zu nutzen, und dann zu einem späteren Zeitpunkt die dabei gemachten Erfahrungen aufzugreifen und zu diskutieren. Das *Coaching* der *Cognitive Apprenticeship* wurde dadurch konsequent vom ersten, dem schulischen Lernkontext, auf den zweiten, den betrieblichen Kontext, ausgedehnt. Um diesem zentralen Übergang in den betrieblichen Kontext genügend Raum zu geben, rückten die Schritte *Artikulieren* und *Reflektieren* der *Cognitive Apprenticeship* in den Hintergrund. *Coaching*, *Artikulieren* und *Reflektieren* wurden mit der Zeit zu einem einzigen Schritt *Üben*.

Als dritte Anpassung wurde mit der Zeit die Darstellung des didaktischen Ablaufs so umgearbeitet, dass der nun geschaffene didaktische Bogen deutlicher erkennbar war. Er nimmt seinen Ausgangspunkt bei den (betrieblichen) Vorerfahrungen der Lernenden und führt über schulisches Lernen wieder zurück zum Gebrauch des Gelernten im betrieblichen Kontext. Parallel zu der oben beschriebenen Verschiebung vom Fokus auf *Aufgaben* hin zu *Situationen* (vgl. Punkt 0) änderte sich die Terminologie. Beim *Modellieren* sprach ich nicht mehr von einem Modell, wie man eine Aufgabe vom entsprechenden Typus bearbeitet, sondern vom Modell dafür, wie man eine entsprechende betriebliche Handlungssituation professionell bewältigt. Damit wurde für die Lehrpersonen deutlicher wahrnehmbar, dass es darum geht, ein praktisch brauchbares und nicht ein schulisches tradiertes Verfahren vorzustellen. Zudem erweiterte sich der Fokus vom rein Rechnerischen auf all das, was aus fachkundlicher Sicht bei der Bewältigung der Aufgabe auch noch bedacht werden muss.

Um den Bezug zur betrieblichen Situation und zum situativen (Vor)Wissen der Lernenden bezüglich dieser Situation herzustellen, wurde an den Anfang ein weiterer Schritt gestellt, in dem die Lernenden die Gelegenheit erhalten, von ihren Erfahrungen zu erzählen. Auch dies hatte zur Folge, dass die Situation gegenüber der „Rechenaufgabe“ mehr in den Vordergrund trat. Zudem erhielt die Vielfalt, in der sich Situationen in den verschiedenen Betrieben manifestieren, ihren gebührenden Platz im Ablauf.

Damit war das, was am Schluss dann die Acht Schritte hieß (*fachrechnen:Acht Schritte*), im wesentlichen am Platz. Ergänzend zum Grundgerüst kamen mit der Zeit noch drei Elemente hinzu:

**Schritt 1, Warten bis die Lernenden entsprechende Erfahrungen gesammelt haben:** Über verschiedene Umsetzungsversuche von Lehrpersonen wurde bald einmal deutlich, dass der ganze Ablauf recht gut funktioniert, sofern die Lernenden zur behandelten Situation Erfahrungen aus den Betrieben mitbringen (ähnliches berichtet bspw. Chazan 2000). Das ist nicht weiter überraschend,

denn der ganze Aufbau zielt darauf ab, diese Erfahrungen zu bearbeiten und zu ergänzen. Schritt 1 wurde daher hinzugefügt, um deutlich zu machen, dass das ganze didaktische Modell nur unter dieser Bedingung funktioniert.

**Üben mit selbst erfundenen Aufgaben:** Ein bisher nicht erwähnter Input in den ganzen Prozess war ein Weiterbildungslehrgang für Mathematikdidaktik, den ich in dieser Zeit besuchte. In diesem Lehrgang wurde u.a. *Intelligentes Üben* als alternative Form zum Abarbeiten von traditionellen Übungsserien thematisiert (bspw. Leuders 2009). Die meisten der besprochenen Alternativen lagen weit ausserhalb dessen, was Lehrpersonen an Berufsfachschulen mit ihren gegebenen Ressourcen anpacken können. Einzig der Vorschlag, die Lernenden die Aufgaben selbst erfinden zu lassen, schien umsetzbar. Ich habe ihn dann auch schon eingebaut, als noch die *Cognitive Apprenticeship* als Modell im Zentrum stand. Die Idee hat sich bewährt.

**Schritt 7, Spickzettel schreiben:** Kognitionspsychologisch ist klar, dass der Versuch, das an der Schule Gelernte im Betrieb zu gebrauchen, eine echte Herausforderung darstellt, die man nicht noch unnötig durch spezielle Gedächtnisleistungen vergrössern sollte. Der Vorschlag, die Lernenden daher zur Entlastung und Vorbereitung Spickzettel schreiben zu lassen, ist eine alte Idee, die auf meine Zusammenarbeit mit Manfred Künzel zurückgeht. Ich habe sie hier wieder aufgenommen.

Die wesentliche Veränderung, welche das didaktische Modell erfuhr, lässt sich wie folgt zusammenfassen: Am Anfang stand mit der *Cognitive Apprenticeship* ein zwar auf Handlungskompetenz ausgerichtetes, aber eher schulzentriertes Modell, in dem explizite Reflexion der Eigenarten des rechnerischen Vorgehens eine wichtige Rolle spielt. Das wurde ersetzt durch ein Modell, welches ganzheitlicher die Bewältigung einer bestimmten betrieblicher Situation ins Zentrum stellt. Es geht von den Vorerfahrungen der Lernenden mit dieser Situation aus und schlägt den Bogen bis hin zum Gebrauch des in der Schule Behandelten in eben dieser Situation im betrieblichen Alltag.

## 5.6 Metakompetenz der Lernenden

Neben der (abnehmenden) Darstellung von Hintergrundtheorien und der Verfeinerung des didaktischen Modells hat sich die Gewichtung bei einem dritten Inhalt im Laufe der Zeit grundlegend verschoben. Von Anfang an stand die Idee im Zentrum, dass die Lehrperson modellhaft das Bearbeiten einer bestimmten Aufgabe/Situation vormachen sollte. Daneben tauchte aber anfangs immer wieder die Frage auf, ob man den Lernenden nicht auch eine etwas allgemeinere Metakompetenz zum Bearbeiten beliebiger Aufgaben vermitteln könnte, und wie diese Metakompetenz aussehen müsste.

Wie oben geschildert (Punkt 5.1), war eine der Aufgaben, welche die Lehrpersonen in den ersten Kursen zu bearbeiten hatten, der Entwurf eines in Schritten gegliederten Problemlösevorgehens, welches die Lernenden im Rahmen von *Reciprocal Teaching* hätten einsetzen können. Daraus entstand über mehrere Kurse hinweg eine *Lernanleitung Mathematik* bestehend aus fünf Schritten (1. Woran erinnert mich die Aufgabe? 2. Welches Vorwissen habe ich? 3. Aufgabe bearbeiten 4. Was habe ich getan? 5. Wo kann ich das sonst noch gebrauchen?).

Diese *Lernanleitung* war erkennbar angelehnt an die Schritte der CogApp+ (*fachrechnen: [Neue Verfahren Einüben](#)*) und auf das Bearbeiten von *Aufgaben* im schulischen Kontext ausgerichtet. Mit der Verschiebung des Fokus von *Rechenaufgaben* hin zur Bewältigung von *Handlungssituationen* geriet dieses Anliegen in den Hintergrund und verschwand dann schliesslich ganz aus den Kursen und Publikationen. Ersetzt wurde es durch zweierlei:

**Zentrale Bedeutung des situierten, impliziten Wissens:** Einmal verfestigte sich bei mir die Überzeugung, dass die eigentliche Herausforderung für die Lernenden darin besteht, situieretes *Gebrauchswissen* zu erwerben. Das kann nur in der *Handlungssituation* selbst geschehen. Und das entsprechende Wissen ist typischerweise zu einem guten Teil implizit und kaum formalisierbar. Entsprechend macht es keinen Sinn, solche schulorientierten *Lernanleitungen* zu entwerfen.

**Optimismus bezüglich des Vorwissens und der situierten Lernfähigkeit:** Der Verzicht auf eine *Lernanleitung* wurde ersetzt durch ein optimistisches Vertrauen darauf, dass die Lernenden in der konkreten Situation im Betrieb sehr gut ohne detaillierte Lernanleitung zurechtkommen und auch das dafür notwendige Vorwissen mitbringen. Glücklicherweise scheint es so, als wäre dieser Optimismus berechtigt, berichten doch viele Lehrpersonen davon, wie überraschend gut ihre Lernenden in der Lage sind, die *Handlungssituationen* zu bewältigen, wenn einmal die Verbindung dazu hergestellt ist.

Teilweise auf Grund der theoretischen Annahmen aus dem IML, teilweise auf Grund der Erfahrungen in den Kursen bezüglich der Aspekte, bei denen die Lehrpersonen am einfachsten eine erlebbare Verbesserung ihres Unterrichtserfolges erreichen, hat sich also der Fokus von der kleinschrittigen Anleitung von Lernprozessen verschoben hin zur Bereitstellung von Voraussetzungen, unter denen die den Lernenden vertrauten Prozesse von selbst greifen.

Eine Zwischenstufe nimmt das ziemlich genau in der Mitte des Entwicklungsprozesses entstandene Konzept des unterstützten *Horizontalen Transfers* ein (*fachrechnen: [Horizontaler Transfer](#)*). Ich biete dieses didaktische Modell nun nur noch als Ausweg an, wenn sich zeigt, dass bei bestimmten Lernenden der den *Acht Schritten* zugrunde liegende Optimismus bezüglich des Vorwissens bzw. der Mobilisierbarkeit dieses Vorwissens versagt.

Ebenfalls auf der Strecke geblieben ist ein anderer didaktischer Ansatz, der in der ersten Hälfte der Entwicklung eine gewisse Rolle spielte. Wie eingangs erwähnt, brachte ich in meinen didaktischen Repertoire das Arbeiten mit Spielklötzen etc. zur Darstellung von Zusammenhängen, Konzepten etc. mit (Punkt 1.3, bzw. *fachrechnen: [Vorgänge modellieren](#)*). Im Rahmen der *Acht Schritte* könnte man diese Technik einsetzen, wenn es den Lernenden nicht gelingt, die Verbindung zwischen der *Handlungssituation* und dem durch die Lehrperson in Schritt 5 vermittelten Wissen herzustellen. Allerdings zeigte sich auch hier mit der Zeit, dass die dafür notwendige Intervention ein für die Möglichkeiten des Berufsschulunterrichts zu detailliertes Eingehen auf die kognitiven Vorgänge der Lernenden verlangt. Vor allem dann, wenn die Schwierigkeiten der Lernenden darin liegen, dass sie gewisse Konzepte (wie bspw. *Steigungsprozente*; vgl. *fachrechnen: [Konzepte modellieren](#)*) nicht in den Griff bekommen, übersteigt es die vorhandenen Ressourcen der Lehrpersonen, darauf differenziert einzugehen. Sie können die Lernenden besser unterstützen, wenn aus eher abstrakten Konzepten wie *Steigungsprozente* passende situierte Abstraktionen bilden – wie bspw. „1% Steigung meint, dass es pro Meter um 1 cm nach oben geht“.

## 5.7 Arbeiten mit dem didaktischen Modell

Die Anleitung, welche die Lehrpersonen zum Arbeiten mit den didaktischen Modellen erhielten, blieb in grossen Zügen über die ganze Zeit recht konstant. Schon auf dem Hintergrund der *Drei Welten* wurden zwei Aufgaben formuliert, die es als Vorbereitung zu erledigen gilt:

**Situationen suchen:** Stellt man berufliche *Handlungssituationen* ins Zentrum, muss man sich zuerst einmal klar machen, in welchen Situationen ihres beruflichen Alltags Lernende rechnerisch/mathematische Herausforderungen zu bewältigen haben (*fachrechnen: [Berechnungssituationen](#)*).

**Praxistaugliches Verfahren finden:** Sind diese gefunden, gilt es für jede ein praxistaugliches Vorgehen (*fachrechnen: [Mathematische Werkzeuge](#)*) zur Bewältigung eben dieser Herausforderungen zusammenzustellen.

Nach der Einführung der *CogApp+* und erst recht nach dem Übergang zu den *Acht Schritten* kam dann noch dazu:

**Ein Einstiegsaufgabe formulieren:** Als Einstieg eine Aufgabe finden, welche die Lernenden so herausfordert, dass sie sich bewusst werden, was sie noch dazulernen möchten.

Auch hier gab es am Anfang Versuche, eine Anleitung *Arbeiten mit den drei Welten* zu schreiben (analog zur *Lernanleitung* für die Lernenden). Und wie dort ist diese Anleitung mit der Zeit verschwunden und durch die Überzeugung ersetzt worden, dass Lehrpersonen v.a. Erfahrungen im eigenen Unterricht sammeln müssen, um entsprechendes, oft implizites Gebrauchswissen zu bilden.

### 5.8 Didaktischer Einstieg

Allgemein lässt sich eine Verschiebung weg von einer kleinschrittigen Analyse und Begleitung von Lernprozessen (bei den Lernenden durch die Lehrpersonen und bei den Lehrpersonen durch mich als Dozenten) hin zu einem mehr ganzheitlichen Arrangement beobachten, bei dem direkt mit der eigentlichen Handlungssituation gearbeitet wird (bei den Lernenden die *Berechnungssituation*, bei den Lehrpersonen ihre *Unterrichtssituation*).

Eine ähnliche Verschiebung fand auch bei der am Anfang eines jeden Kurses eingesetzten Gruppenarbeit statt. Von Anfang an war es das Ziel, damit das Vorwissen der Lehrpersonen zugänglich zu machen.

In den ersten Kursen erhielten die Lehrpersonen den Auftrag, gruppenweise zusammenzustellen, welche Schwierigkeiten ihre Lernenden haben und welches nach ihrer Meinung die Ursachen für diese Schwierigkeiten sind. Die Resultate wurden dann im Plenum vorgestellt und gesammelt. Die Intention dahinter war eine diagnostische: Ich wollte so in Erfahrung bringen, mit welchen Vorstellungen die Lehrpersonen operieren, um dann gezielt ungünstige Vorstellungen im Kurs bearbeiten zu können. Dieses diagnostische Anliegen hatte eine Parallele zur Idee, dass die Schwierigkeiten von Lernenden beim Rechnen oft auf Fehlvorstellungen beruhen, die es zu bearbeiten gilt (bspw. *misconceptions* bei VanLehn 1990.)

Dieser Einstiegsauftrag wurde in den späten Kursdurchführungen vollständig ersetzt durch den Auftrag, gruppenweise eine Unterrichtseinheit zum Thema Fachrechnen zu entwerfen und zu präsentieren. Dies entspricht dem Schritt 3 der *Acht Schritte* (eine mittelschwere Aufgabe stellen), dessen Ziel es ist, für die Lernenden/Lehrpersonen erlebbar zu machen, wo sie Lernbedarf haben. Die Diagnose setzt also nicht mehr bei vermutlich relevanten *Wissensressourcen* an, sondern hat das Ziel, für die Lehrpersonen selbst (und für mich als Dozenten) direkt die vorhandene *Handlungskompetenz* sichtbar zu machen.

Diese Verschiebung erlaubt es, mit den Lehrpersonen viel direkter an der Frage zu arbeiten, welche für sie im Zentrum steht: *Was muss ich tun?* Zudem macht es gewisse Aspekte der *Acht Schritte* in Form eines pädagogischen Doppeldeckers erlebbar.

### 5.9 Subthema Sprache

Das Subthema *Sprache von Textaufgaben* wurde zwar während der ganzen Zeit durchgezogen, fristete aber ein Randdasein. Trotzdem lässt sich auch hier dieselbe generelle Entwicklung beobachten. Am Anfang stand als Hintergrundtheorie die *Schematheorie des Textverstehens*, welche die Lehrpersonen zum Analysieren vorgegebener Beispiele aus den PISA Untersuchungen einsetzen sollten.

Unterdessen ist an diese Stelle eine Liste von sprachlichen Stolpersteinen getreten (*fachrechnen: [Die spezielle Sprache von Mathematikaufgaben](#)*), die es beim Schreiben von Aufgaben zu vermeiden gilt. Die Lehrpersonen erhalten dann im Kurs Zeit, eigene Aufgaben (meist von ihnen geschriebene Prüfungsaufgaben) umzuformulieren. Dabei entwickeln sich die Tipps, wie sich das bewerkstelligen lässt, anhand der bearbeiteten Beispiele langsam aber stetig von Kurs zu Kurs weiter.

### 5.10 Umsetzungswille und Umsetzungserfolg bei den Lehrpersonen

Zentrales Ziel der ganzen Entwicklung war es, den Lehrpersonen etwas anzubieten, das es ihnen erlauben würde, innert nützlicher Frist für sie positive Veränderungen im Unterricht vorzunehmen.

Innert nützlicher Frist: Innerhalb der Zeitspanne, welche für die Durchführung entsprechender Weiterbildungskurse zur Verfügung steht. Zur Zeit der Durchführung der späten Kurse war das typischerweise ein bis manchmal zwei Tage für die Einführung in die *Acht Schritte* samt Hintergrundtheorie, dann eine Zwischenzeit von drei bis fünf Monaten für Umsetzungsversuche im eigenen Unterricht und schliesslich zwei halbe Tage zur Reflexion der gemachten Erfahrungen.

Für die Lehrpersonen positive Veränderungen: Generell mehr Freude am Fachrechnen sowohl bei den Lehrpersonen wie bei den Lernenden; positive Überraschung darüber, wie viel nicht erwartetes Vorwissen die Lernenden mitbringen; besserer Lernerfolg der Lernenden.

Wie schon erwähnt (Punkt 3), war der Erfolg der ersten Kurse in dieser Hinsicht sehr bescheiden. Es war viel Widerstand oder auch einfach nur Verwirrung bei den Lehrpersonen zu spüren. Und auch die Umsetzungsversuche wollten nicht so recht gelingen oder wurden nur halbherzig angegangen.

Dies hat sich gegen Ende deutlich verändert. Widerstände, das vorgeschlagene Modell der *Acht Schritte* einmal selbst im Unterricht auszuprobieren, sind keine vorhanden. Die Umsetzungen sind zwar erwartungsgemäss erkennbare Anfängerprodukte. Sie werden aber alle von den Lehrpersonen als ermutigende Schritte in eine vielversprechende Richtung erlebt. Die meisten Lehrpersonen berichten begeistert, wie gut und motiviert ihre Lernenden gearbeitet haben. Ein Zitat aus einer schriftlichen Dokumentation einer gelungenen Umsetzung aus einem aktuellen Kurs „Die 8-Schritt-Methode von Hansruedi Kaiser überzeugt mich absolut. Danke dafür.“

In den allerletzten Kursen ist es sogar gelungen, Lehrpersonen an Bord zu holen, welche nicht eigentlich Fachrechnen vermitteln, sondern in den ersten Semestern der Ausbildungen „Grundlagen“ in Mathematik und Physik legen sollen. Diese Lehrpersonen stehen häufig vor dem Problem, dass diese „Grundlagen“ nur einen Bezug zu Situationen haben, welche ihre Lernenden erst viel später in der Ausbildung erleben werden – wenn überhaupt. Die Grundvoraussetzung für die *Acht Schritte* ist somit nicht direkt gegeben. Daher hatten entsprechend eingesetzte Lehrpersonen verständlicherweise Mühe mit den *Acht Schritten*, auch wenn ihnen diese als didaktisches Modell für das Fachrechnen durchaus einleuchteten. Seit zwei, drei Kursen haben diese Lehrpersonen nun aber plötzlich und mit gutem Erfolg angefangen, mit Situationen aus dem privaten Alltag ihrer Lernenden zu arbeiten. Vorgeschlagen hatte ich dies schon lange. Aber offenbar habe ich erst in den letzten paar Kursen die richtige Art gefunden, diesen Vorschlag einzubringen.

Wie ich das geschafft habe, ist mir unklar. Eigentlich hatte ich diesen Text zu schreiben begonnen, um genau das herauszufinden. Aber leider weiss ich es immer noch nicht.

## 6 Die grossen Entwicklungslinien

Auf einer abstrakteren Ebene lassen sich in den beschriebenen Entwicklungslinien zusammenfassend sechs übergreifende Prozesse erkennen:

**Wissenszuwachs:** Wie nicht anders zu erwarten, hat mein Wissen über theoretische Hintergründe der Mathematikdidaktik, über mathematikdidaktische Modelle, über die Unterrichtsrealität der Lehrpersonen und über ihre Art zu denken und zu handeln stetig zugenommen. Vermutungen haben sich bestätigt oder wurden widerlegt. Lücken haben sich gefüllt. Griffige Beispiele sind dazugekommen.

**Überwinden alter Gewohnheiten:** Etwas überraschender war es im Rückblick festzustellen, wie lange es gedauert hat, bis ich selbst alte Denkmuster überwunden hatte. Dass Fachrechnen als Handlungskompetenz situiert gedacht werden muss, war von Anfang an als theoretische Basis gegeben. Es dauerte aber relativ lange, bis ich konsequent nicht mehr von (schulischen) Aufgaben, sondern von (beruflichen) Handlungssituationen sprach.

**Entwicklung geeigneter situierter Abstraktionen:** Als erstes eigentliches Produkt entstanden für die Kommunikation mit den Lehrpersonen geeignete situierte Abstraktionen (Noss & Hoyles 1996). Ganz im Sinne der Vorstellung von Vygotskij wuchsen die durch das IML eingebrachten *wissenschaftlichen*

*Begriffe* und die im Gespräch mit Lehrpersonen gebrauchten *alltäglichen Begriffe* einander entgegen (Vygotskij 2002). Dazwischen bildete sich eine brauchbare, im Unterrichtsalltag der Lehrpersonen situierte mittlere Begriffsebene.

**Entwicklung eines angepassten didaktischen Konzepts:** Die *Acht Schritte* sind das zweite, isolierbare und massgeschneiderte Produkt. Wie bei allen Schritt für Schritt Anleitungen war hier die Herausforderung die, genau das explizit zu machen, was den Lehrpersonen weiter hilft, und genau diejenigen Details implizit zu lassen, deren Erwähnung nur verwirrt.

**Verschiebung von Steuerung hin zu Ermöglichung:** Grob gesagt standen am Anfang Versuche einer differenzierten Diagnose des Vorwissens und einer kleinschrittigen Steuerung des Lernens. Dies wurde ersetzt durch Arrangements, in denen die Lernenden selbst erleben, was sie schon können, und die so aufgebaut sind, dass spontane Lernprozesse optimal greifen. Diese Veränderung fand auf beiden Ebenen statt, d.h. sowohl bzgl. der Lernenden im Schulunterricht wie auch bzgl. der Lehrpersonen im Kurs.

**(Implizites) Dozentenwissen:** Die Vermittlung von Hintergrundwissen und didaktischen Konzepten geschah im Wesentlichen in direkter Interaktion mit den Lehrpersonen. Daraus entwickelte sich Wissen darüber, was wann gesagt werden kann, was besser ungesagt bleibt, welche Beispiele unmittelbar einleuchten etc. Einiges davon liesse sich explizit beschreiben. Aber wie es dazu kam, dass ich nun auch Lehrpersonen erreichen kann, die „Grundlagen“ in Mathematik und Physik unterrichten müssen, kann ich offenbar nicht explizieren.

## 7 Lässt sich aus dem Ganzen etwas lernen?

Als Letztes bleibt die Frage, ob das, was hier geschehen ist, in irgendeiner Art modellhaft für ähnliche pädagogisch-didaktische Entwicklungen sein kann. Mir fällt es schwer, darauf eine Antwort zu geben. Sicher ist, dass es bei einem solchen Prozess im Sinne einer Produktentwicklung darum gehen muss, entsprechende griffige situierte Abstraktionen und Werkzeuge herauszuarbeiten. Und sicher scheint mir auch, dass dies Zeit braucht – auch wenn das Ganze in einem grösseren Team von Forschenden/Dozierenden und mit einer höheren Kadenz an Kursen vermutlich in weniger als 12 Jahren erreichbar gewesen wäre.

Aber ob sich über diese beiden Punkte hinaus noch mehr ableiten lässt, müssen andere entscheiden.

## 8 Erwähnte Literatur

- Anderson, J. (1999). Being Mathematically Educated in the 21st Century. In C. Hoyles, C. Morgan & G. Woodhouse (Eds.), *Rethinking the Mathematics Curriculum* (pp. 8-21). London: Falmer Press.
- Baruk, S. (1985). *L'âge du capitaine*. Paris: Seuil.
- Baruk, S. (1989). "Wie alt ist der Kapitän?" *Über den Irrtum in der Mathematik*. Basel: Birkhäuser.
- Baruk, S. (2004). *Si 7 = 0. Quelles mathématiques pour l'école?* Paris: Odile Jacob.
- Carraher, D. W. (1991). Mathematics Learned In and Out of School: A Selective Review of Studies from Brazil. In M. Harris (Ed.), *School, Mathematics, Work* (pp. 169-201). Basingstoke: The Falmer Press.
- Chazan, D. (2000). *Beyond Formulas in Mathematics and Teaching*. New York: Teachers College Press.
- Gibbons, M., Limoge, C., Nowotny, H., Schwartzmann, S., Scott, P., & Trow, M. (1994). *New Production of Knowledge: Dynamics of Science and Research in Contemporary Societies*: SAGE Publications Ltd, London.
- Grämiger, B., & Kaiser, H. (2011). Mathematisches Überlebenstraining für Bauarbeiter. *Education Permanente* (1), 40-42.

- Grassi, A., & Künzel, M. (2010). Lernen heisst, ein eigenes Bild erschaffen. *Folio* (1), 34-37.
- Herndon, J. (1971). *Die Schule überleben*. Stuttgart: Klett.
- Hirt, U., & Wälti, B. (2008). *Lernumgebungen im Mathematikunterricht. Natürliche Differenzierung für Rechenschwache bis Hochbegabte*. Seelze-Velber: Kallmeyer.
- Holt, J. (2004). *Aus schlauen Kindern werden Schüler. Von dem, was in der Schule verlernt wird*. Weinheim: Beltz.
- Kahneman, D. (2011). *Thinking, fast and slow*. London: Allen Lane.
- Kaiser, H. (1980). *Wissenschaftstheoretische und Erkenntnistheoretische Überlegungen im Rahmen der Sozialwissenschaften*. Lizentiatsarbeit, Universität Bern, Bern.
- Kaiser, H. (2005a). *Wirksame Ausbildungen entwerfen - Das Modell der Konkreten Kompetenzen*. Bern: h.e.p. verlag.
- Kaiser, H. (2005b). *Wirksames Wissen aufbauen - ein integrierendes Modell des Lernens*. Bern: h.e.p. verlag.
- Kaiser, H. (2009). Modelle bauen und begreifen. Mehr als blindes Rechnen bei angewandten Aufgaben. In L. Hefendehl-Hebeker, T. Leuders & H.-G. Weigand (Eds.), *Mathemagische Momente* (pp. 74-85). Berlin: Cornelsen.
- Kaiser, H. (2010). *Rechnen und Mathematik anwendungsbezogen unterrichten*. Winterthur: Edition Swissem.
- Kapur, M., & Bielaczyc, K. (2012 ). Designing for Productive Failure. *Journal of the Learning Sciences*, 21(1), 45-83. doi: 10.1080/10508406.2011.591717
- Kintsch, W., & vanDijk, T. A. (1978). Toward a model of text comprehension and production. *Psychological Review*, 85, 5, 363-394.
- Le Boterf, G. (1998). *De la compétence à la navigation professionnelle*. Paris: Editions d'Organisation.
- Leuders, T. (2009). Intelligent üben und Mathematik erleben. In L. Hefendehl-Hebeker, T. Leuders & H.-G. Weigand (Eds.), *Mathemagische Momente* (pp. 130-143). Berlin: Cornelsen.
- Maaß, K. (2005). Modellieren im Mathematikunterricht der Sekundarstufe I. *Journal für Mathematikdidaktik*, 26(2), 114-142.
- Noss, R., & Hoyles, C. (1996). *Windows on Mathematical Meanings. Learning Cultures and Computers*. Dordrecht: Kluwer.
- Nunes, T., Schliemann, A. D., & Carraher, D. W. (1993). *Street mathematics and school mathematics*. Cambridge MA.: Cambridge University Press.
- Palincsar, A. S., & Brown, A. L. (1989). Classroom dialogues to promote self-regulated comprehension. In J. Brophy (Ed.), *Teaching for Meaningful Understanding and Self-regulated Learning, Vol. 1*. (pp. 35-72). Greenwich, CT: JAI Press.
- Reilly, Y., Parsons, J., & Bortolot, E. (2009). *Reciprocal Teaching in Mathematics*. Paper presented at the MAV Annual Conference, Melbourne.
- VanLehn, K. (1990). *Mind Bugs: The origins of procedural misconceptions*. Cambridge, Mass.: MIT Press.
- Vygotskij, L. S. (2002). *Denken und Sprechen*. Weinheim: Beltz.