Rechnen üben? Ja, aber richtig!

Hansruedi Kaiser Oktober 2011

1 Graue Päckchen

Will man etwas beherrschen, muss man üben. Das gilt in der Berufsbildung an vielen Orten. Und es gilt auch für den Bereich Rechnen und Mathematik.

Traditionell spielen sich Berechnungsübungen wie folgt ab: Die Lehrperson erklärt ein bestimmtes Berechnungsverfahren. Dann bearbeiten die Lernenden eine mehr oder weniger grosse Menge von Aufgaben dazu. Diese Aufgaben finden sie entweder in Lehrmitteln oder auf Arbeitsblättern.

Die Motivation der Lernenden, solche Päckchen von Aufgaben abzuarbeiten, ist meist begrenzt. Und in der modernen Mathematikdidaktik werden sie als „graue Päckchen“ bezeichnet – langweilig und relativ ineffizient. Dieser Text ist ein Versuch darzustellen, was an Stelle der „grauen Päckchen“ sinnvolleres treten könnte.

2 Wissen und Lernen

Für eine differenzierte Betrachtung des Übens braucht es einen differenzierten Blick auf Wissen und Lernen.

2.1 Arten des Wissens

Erstens: Wissen ist nicht gleich Wisse. Es lassen sich mindestens vier verschiedene Arten von Wissen bzw. Wissenssystemen unterscheiden:

Deklaratives System

Das Wissen im *deklarative System* besteht aus Begriffen, Regeln und Definitionen, die zueinander in vielerlei Beziehungen stehen können. Problemlösen geschieht im *deklarativen* System dadurch, dass man aus den Regeln und Konzepten einen Plan ableitet und diesen dann ausführt. Dieser Prozess läuft immer sehr bewusst ab, ist anstrengenden und fehleranfällig.

Situatives System

Neben der Ebene der abstrakten Begriffe gibt es aber auch noch ein ganz anderes Wissen, das aus lauter Erinnerungen an konkrete, selbst erlebte Situationen besteht. Diese Erinnerungen sind in einem dichten Netz miteinander verwoben. Denkt man an eine dieser Situationen, so kommen sogleich andere, ähnliche oder verwandte in den Sinn. Wird Wissen dieser Art zur Bearbeitung von Aufgaben eingesetzt, dann geschieht dies, indem man neue Situationen ähnlich behandelt wie verwandte, bereits erlebte Situationen.

Prozedurales System

Das Wissen im *prozeduralen System* besteht aus einer Vielzahl von Wenn-Dann-Regeln, die auf die momentane *Situation* angewendet, den nächsten Schritt eines Routineablaufs bewältigen. Die Regeln sind nicht direkt bewusst zugänglich, sondern steuern als Automatismen das Vorgehen in gut geübten Routineaufgaben, wie z.B. beim schriftlichen Addieren. Aufgaben können mit Hilfe von prozeduralem *Wissen* ohne eigentliche Planung gelöst werden, indem einfach von der Ausgangssituation ausgehend Schritt für Schritt weitergearbeitet wird.

Sensomotorisches System

Und zuletzt macht es Sinn von den übrigen drei Systemen noch ein viertes System, das *sensomotorische System*, abzugrenzen. Auch dieses Wissen steuert, wie das *prozedurale System,* gut beherrschte Abläufe. Allerdings nicht mittels Wenn-Dann-Regeln, sondern über Rückkopplungsmechanismen, die den Handelnden und die Umwelt zu einem System zusammenschliessen. Typische Beispiele dafür sind Bewegungssteuerungen wie etwa beim Tastaturschreiben.

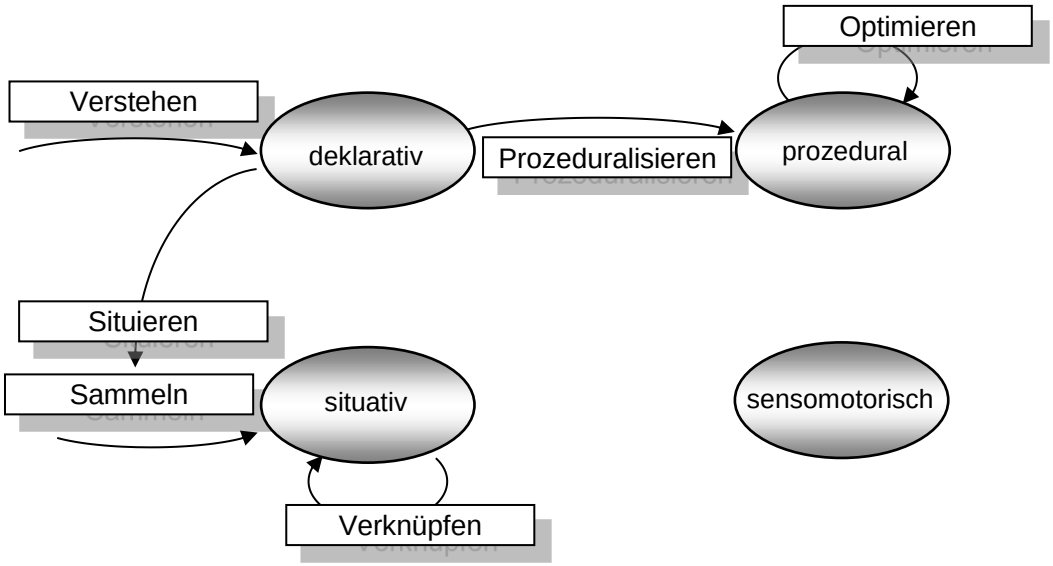
2.2 Ein Bild des Handelns im Berufsalltag

Aus der Forschung weiss man nun, dass das „Anwenden“ von (in der Schule gelerntem) *deklarativem Wissen* im Berufsalltag keine grosse Rolle spielt. Eine bewusste, rationale Planung aufgrund *deklarativen Wissens* ist viel zu zeitaufwändig, zu fehleranfällig und zu wenig flexibel. Wirklich handlungsfähig sind nur Personen, die über entsprechendes *situatives Wissen* verfügen.

Um ein Berechnungsverfahren wirklich einsetzen zu können, müssen Lernende also entsprechende Erfahrungen mit der Anwendung des Verfahrens in verschieden Situationen sammeln. Werden sie dann im Berufsalltag mit ähnlichen konfrontiert, dann werden sie auf diese Erfahrungen zurückgreifen können. Je vielfältiger diese Erfahrungen sind, umso flexibler werden die Lernenden den Einsatz des Verfahrens der aktuellen Situation anpassen können. In den erinnerten Erfahrungen sind Verweise auf nützliche *sensomotorische* Fertigkeiten, Prozeduren und *deklarative* Wissensstücke eingebettet, die so flexibel beigezogen werden können.

2.3 Lernaufgaben

Zweitens: Lernen ist nicht gleich Lernen bzw. Üben ist nicht gleich Üben. Die für das Folgende wichtigsten Lernaufgaben sind unten zusammengestellt (für das Bild mit allen Lernaufgaben: www.hrkll.ch/typo/iml2/wissen-aufbauen/lernarten.html). Was mit den einzelnen Begriffen gemeint ist, ergibt sich im Folgenden bei der Beschreibung der verschiedenen Arten des Übens.



Figur 1: Lernaufgaben im Zusammenhang mit „Üben“

3 Üben 1: Anwendungsprobleme klären

Kein Verfahren, keine Regel wendet sich selbst an. Auch gut erklärte Berechnungsverfahren müssen von den Lernenden mit Leben erfüllt werden, damit sie in ihrem Handeln wirksam werden. Im Bild der vier Wissensarten lässt sich das wie folgt darstellen: Die Lehrperson instruiert das Verfahren. Die Lernenden *verstehen* (vgl. Figur 1), was ihnen erklärt wird und bauen entsprechendes deklaratives Wissen auf.

Damit die Lernenden aber handlungsfähig werden, muss als nächster Schritt mit Hilfe dieses deklarativen Wissens situatives Wissen entstehen (*situieren*, vgl. Figur 1). Die Lernenden müssen Erfahrungen mit der Anwendung des instruierten Vorgehens *sammeln* (vgl. Figur 1). Das läuft aus verschiedenen Gründen kaum je ohne Schwierigkeiten ab. Einmal kann keine Instruktion jedes Detail regeln. Vieles, was in einer Instruktion gesagt wird, muss mittels „gesundem Menschenverstand“ interpretiert werden. Heisst es in der Instruktion beispielsweise: „*Die Fläche eines Rechtecks berechnet man, indem man die Länge und die Breite miteinander multipliziert*“, dann lässt diese Anweisung offen, wie man denn im konkreten Fall erkennt, was hier die Länge und die Breite sind. Welchen Wert soll man beispielsweise der „Länge“ zuordnen, wenn beide Seiten des Rechtecks gleich lang sind?

Oft sind diese Anwendungsprobleme keine grossen Probleme und lassen sich leicht klären („*Eigentlich spielt es für die Flächenberechnung keine Rolle, welchen Wert man der ‚Länge’ und welchen der ‚Breite’ zuordnet*“). Aber aus irgendwelchen Gründen, die sich nicht vorhersagen lassen, können sie für einzelne oder auch alle Lernende zu Stolpersteinen werden, die zuerst beseitigt werden müssen. Zudem ist schon das *Verstehen* der Instruktion keine eindeutige Sache. Es ist keineswegs immer und überall klar, was an dem, was die Lehrperson sagt, wie interpretierte werden muss. Die Verwendung der beiden Begriffe „Länge“ und „Breite“ lässt vermuten, dass die Unterscheidung wichtig ist, dass es wichtig ist zu wissen, was mit der „Länge“ im Gegensatz zur „Breite“ gemeint ist. Dass dem nicht so ist, zeigt sich erst bei der Anwendung. Haben die Lernenden im Moment der Instruktion noch wenig Erfahrungen mit der Anwendungssituation, so lassen sich solche Fehlinterpretationen nicht vermeiden.

„Üben“ im Sinn von „Anwendungsprobleme klären“ hat also zum Ziel, geeignetes situatives Wissen aufbauen, geeignete Erfahrungen ermöglichen, in denen ein neu instruiertes Verfahren Wurzeln schlagen kann.

Natürlich müssen die Lernenden dazu Anwendungsaufgaben lösen. Wichtig ist in diesem Fall aber nicht, dass eine grosse Menge solcher Aufgaben abgearbeitet wird, sondern dass die Lernenden die Zeit und die Musse haben, jede dieser Aufgaben sorgfältig anzugehen und auftretende Anwendungsfragen nicht zu überspielen, sondern gründlich zu klären.

Üben 1: Anwendungsprobleme klären

- Wenige, sorgfältig ausgewählte Aufgaben stellen
  - Aufgaben, die sich durch das instruierte Verfahren tatsächlich lösen lassen (!)
  - Aufgaben, die erfahrungsgemäss typische Anwendungsprobleme provozieren
- Ausreichend Zeit, die Aufgaben sorgfältig und reflektiert zu lösen
  - Aktive Unterstützung durch die Lehrperson
  - Wohlwollende Klärung aller auftretender Anwendungsfragen (es gibt keine dummen Fragen)
  - Provokation von Anwendungsfragen und -problemen bei Lernenden, die offensichtlich all zu oberflächlich über die Aufgaben hinweggehen.

4 Üben 2: Flexibilität erwerben

Situatives Wissen ist das Wissen der Experten, da es flexibler ist, als das jede Theorie, jede Regel je sein kann. Situatives Wissen ist aber nur dann wirklich flexibel, wenn viele ähnliche, aber doch verschiedene Erfahrungen vorhanden sind, um einen bestimmten Typ von Aufgaben anzugehen.

Sind also einmal die gröbsten Anwendungsfragen geklärt, dann verfügen die Lernenden über erste situative Wissensstücke, die ihnen helfen, einen neuen Typ von Aufgaben anzugehen. Als nächstes ist es wichtig, dass sie dieses Wissensbasis erweitern, dass sie weitere, möglichst vielfältige Erfahrungen *sammeln* und die miteinander *verknüpfen* (vgl. Figur 1).

Dabei werden sie weiterhin dem einen oder anderen Anwendungsproblem begegnen, das zu klären ist. Es werden Situationen auftreten, in denen schwieriger zu erkennen ist, wie das neu gelernte Verfahren anzuwenden ist („*Auch ein Klebstreifen von 2 cm Breite und 20 m Länge ist eine Rechteck!*“). Und dabei benötigen die Lernenden wie bisher Unterstützung.

Wichtig ist in diesem Prozess aber auch, dass die Lernenden Situationen antreffen, in denen die Grenzen des Verfahrens sichtbar werden, in denen deutlich wird, dass das Verfahren kein Allheilmittel ist, das immer und überall eingesetzt werden kann. Dabei sind zwei Arten von Fragen von Bedeutung. Einerseits sind da Fragen, die sich darauf beziehen, wie genau die zum Verfahren gehörenden Vorbedingungen eingehalten werden müssen („*Muss die Fläche ein Rechteck sein, oder funktioniert die Berechnung auch bei beliebigen Vierecken?*“). Nicht bei allen Verfahren müssen die Vorbedingungen gleich streng eingehalten werden. Und nicht alle Vorbedingungen müssen gleich restriktiv berücksichtigt werden („*Man kann auch die 2 cm als Länge und die 20 m als Breite bezeichnen. Die Fläche muss aber (ziemlich genau) ein Rechteck sein.*“)

Und andererseits stellen sich Fragen bezüglich der Genauigkeit: Wie genau kann das Resultat sein („*Wenn die Längen der Seiten auf 1 cm genau gemessen sind, wie genau kann dann das Resultat sein?*“) und wie genau muss das Resultat sein („*Wenn man die Fläche einer Wand berechnet um abschätzen zu können, wie viel Farbe man für einen Anstricht braucht, wie genau muss man die Fläche dann berechnen? Auf den Quadratmeter genau oder auf den Quadratzentimeter genau?*“).

Auch hier ist klar, dass die Lernenden dieses Erfahrungen nur machen können, wenn sie entsprechende Aufgaben lösen. Wichtig ist hier, dass es sich um realistische Aufgaben aus realen Kontexten handelt – denn nur so stellen sich die relevanten Fragen – und dass es möglichst viele möglichst verschiedenartige Aufgaben sind – denn nur so ergibt sich eine breite, flexible Erfahrungsbasis.

Üben 2: Flexibilität erwerben

- Viele, vielfältige, realistische Aufgaben
  - Aufgaben, welche die Lernenden selbst aus den Betrieben mitbringen
  - Zusätzlich besonders eindrückliche Beispiele aus dem Erfahrungsschatz der Lehrperson
- Ausreichend Zeit, die Art, wie die Aufgaben bearbeitet wurden, sorgfältig zu reflektieren und alle Fragen zu diskutieren, welche sich stellen, wenn man sich diesen Aufgaben tatsächlich im realen Alltagsleben gegenüber sieht.
  - Vorbesprechung der Aufgabenlösung in Kleingruppen.
  - Diskussion des Vorgehens im Plenum unter aktiver Teilnahme der Lehrperson

5 Üben 3: Routine ausbilden

Manche Verfahren gelangen so häufig zur Anwendung, dass es sinnvoll ist, wenn sie praktisch automatisch ablaufen. Dann ist es zweckmässig, entsprechendes prozedurales Wissen aufzubauen. Haben Lernende ein Verfahren *prozeduralisiert* (vgl. Figur 1), können sie es ablaufen lassen, ohne sich gross darauf konzentrieren zu müssen, ohne jeweils kurz bei jedem Schritt zu überlegen, wie es weitergeht. Sie bekommen dadurch den Kopf frei, sich auf andere Aspekte der Arbeitssituation zu konzentrieren.

Prozeduralisieren ist aber ein äusserst aufwendiger Prozess. Prozedurales Wissen entsteht erst, wenn die Lernenden buchstäblich hunderte Aufgaben vom gleichen Typ durchgearbeitet haben. Und dies benötigt Zeit, sehr viel Zeit. Daher ist es wichtig, dass man sich gut überlegt, ob sich dieser Aufwand überhaupt lohnt, ob es notwendig ist über die Routine hinaus zu gehen, die sich auf Grund einer breiten situativen Wissensbasis sowieso schon einstellt (Üben 2). Da Berechnungen heute praktisch immer durch den Gebrauch eines Taschenrechners oder eines anderen Geräts unterstützt werden können, dürfte nur noch ganz selten die Notwendigkeit zum *Prozeduralisieren* bestehen.

Sollte es tatsächlich notwendig sein, dass die Lernenden ein bestimmtes Verfahren *prozeduralisieren*, dann muss zuerst einmal sicher gestellt sein, dass sie das Verfahren beherrschen, dass sie entsprechende Aufgaben fehlerfrei bearbeiten können. Es macht überhaupt keinen Sinn, fehlerhafte Abläufe zu prozeduralisieren. Unter anderem lassen sich einmal gut eingeübte „Fehler“ nur schwer wieder „löschen“.

Ist diese Voraussetzung gegeben, ist das Grundrezept des *Prozeduralisierens* einfach: Hunderte Male Aufgaben derselben Art bearbeiten, bis sich die gewünschte Routine einstellt.

Das Problem dabei ist, dass diese Art des Übens sehr viel Zeit beansprucht und von den Lernenden als äusserst langweilig erlebt wird – zu Recht! Wesentlich interessanter kann man diesen Vorgang gestalten, wenn man das zu *prozeduralisierende* Verfahren als natürlicher Teil anderer, umfassenderer Aufgaben übt. („*Es gibt verschiedenste Rechtecke, die alle einen Umfang von 20 cm haben: 6 cm auf 4 cm, 7 cm auf 3 cm etc. Welches dieser Rechtecke hat die grösste Fläche?“. Wenn sich die Lernenden von dieser Aufgabe packen lassen, dann berechnen sie schnell einmal zwanzig oder mehr Flächen, ohne bewusst wahrzunehmen, dass sie nebenbei „Flächen berechnen“ üben.*)

In der Mathematikdidaktik wird eingebettetes *Prozeduralisieren* dieser Art als „intelligentes Üben“ bezeichnet. Neben dem *Prozeduralisieren* wird dabei ein zweites Ziel verfolgt. Bei diesem zweiten Ziel kann es darum gehen, das Verständnis der Lernenden für eher theoretische Zusammenhänge zu vertiefen. (*Die Frage oben nach der grössten Fläche bei gegebenem Umfang zielt in diese Richtung*). Als zweites Ziel kann aber auch anstreben, die Erfahrungsbasis der Lernenden zu vergrössern (Üben 2). In diesem Fall arbeitet man mit konkreten Beispielen, welche die Lernenden aus ihren Betrieben mitbringen, und stellt beispielsweise die Aufgabe, die Beispiele nach bestimmten Kriterien zu vergleichen. („*Wir haben hier für zwanzig Fälle von Wandanstrichen je die Angaben zu Breite und Höhe der Wände und zur Menge der verwendeten Farben. Wird in allen Fällen gleich viel Farbe pro Quadratmeter verarbeitet? Oder gibt es Unterschiede?*“). Typischerweise führen so gefundene Resultate wieder zu interessanten Anwendungsfragen („*Gibt es Gründe, für die gefundenen Unterschiede?*“)

Aufgaben, die „intelligentes Üben“ ermöglichen, führen oft automatisch zu einer Binnendifferenzierung in der Klasse. Lernende, welche keine besonderen analytischen Interessen haben, können sie bearbeiten, indem sie einfach viele Beispiele durchrechnen und sich so langsam an eine mögliche Antwort herantasten. Lernende hingegen, die lieber nachdenken als Zahlen in den Taschenrechner tippen, können versuchen, die Aufgabe durch Nachdenken zu lösen und ihre Vermutungen anhand einiger, gezielt ausgewählter Beispiele zu überprüfen.

Hauptaufgabe der Lehrperson bei dieser Art des Übens ist es, zu überwachen, dass das zu prozeduralisierende Verfahren wirklich von allen beherrscht wird und dass nicht irgendwo in der Klasse etwas Falsches eingeübt wird.

Üben 3: Routine ausbilden

- Prozeduralisieren ist extrem aufwändig; daher gut abklären, ob dieser Aufwand gerechtfertigt ist
- Sicher stellen, dass die Lernenden das zu prozeduralisierende Verfahren beherrschen
- Die Lernenden hunderte Male ähnliche Aufgaben lösen lassen.
- Das Verfahren als Teilaufgabe in umfassendere Aufgaben einbetten (intelligentes Üben)
    - Wenn das Ziel ist, dass die Lernenden gewisse theoretischen Zusammenhänge besser verstehen, dann Aufgaben stellen, bei denen die Lernenden entsprechende Vermutungen anstellen bzw. prüfen müssen
    - Wenn das Ziel ist, dass die Lernenden ihre Erfahrungsbasis erweitern, dann reale Aufgaben bearbeiten lassen, welche die Lernenden selbst aus ihren Betrieben mitgebracht haben
- Während der (intelligenten) Übungsphase überwachen, dass das zu prozeduralisierende Verfahren korrekt angewendet wird.

6 Üben 4: Automatismen erwerben

Vor allem im Verkauf und im Gastgewerbe gibt es Berechnungsaufgaben, die prozeduralisiert beherrscht werden müssen, damit sie sich problemlos in den Handlungsablauf einfügen. Beispielweise:

- Geld herausgeben: Zu bezahlen sind 27.80 Fr., der Kunde gibt 50.00 Fr., es muss das korrekte Wechselgeld abgezählt werden. (Auch wenn die Kasse den Betrag anzeigt, muss dieser Betrag mit Hilfe der vorhandenen Noten und Münzen zusammengesetzt werden).
- Mehrere Preise zusammenzählen: Vier Personen haben in einem Restaurant zusammen zum Mittag gegessen, jede hat etwas anderes konsumiert, jede bezahlt für sich separat, für jede Person muss der zu bezahlende Betrag berechnet werden. (Oft müssen diese Beträge auch berechnet werden, wenn ein von der Kasse berechnetes Total vorliegt, da dieses meist für den ganzen Tisch und nicht für einzelne Personen gilt.)

Typisch für diese Situationen ist, dass die Notwendigkeit einer *Prozeduralisierung* des Wissens auch für die Lernenden offensichtlich ist und dass die Lernenden von daher bereit sind, auch längere „mühsame“ Übungssequenzen auf sich zu nehmen.

Und wie schon beim Üben 3 gilt: *Prozeduralisieren* ist auch hier nur sinnvoll, wenn das einzuübende Verfahren im Prinzip beherrscht wird. Und *Prozeduralisieren* heisst, hunderte Male ähnliche Aufgaben lösen lassen.

Typischerweise sind in diesen Fällen die einzuübenden Verfahren eng mit ganz konkreten Handlungen verbunden – in den Beispielen: Dem Kunden Geld in die Hand abzählen bzw. auf einem improvisierten Notizzettel schriftlich zusammenzählen. Das Üben ist in diesen Fällen am wirkungsvollsten, wenn es im Rollenspiel genau in diese Handlungen eingebettet geübt wird: Mit Spielgeld zu zweit bzw. mit einen Stapel fiktiver Kassenquittungen und einem ungeduldigen Gast gegenüber.

Üben 4: Automatismen erwerben

- Sicher stellen, dass die Lernenden die Notwendigkeit des Prozeduralisierens und „sturen“ Übens auch sehen (sonst besser *Üben 3*)
- Sicher stellen, dass die Lernenden das zu prozeduralisierende Verfahren beherrschen
    - Die Lernenden hunderte Male ähnliche Aufgaben lösen lassen.
    - Das Verfahren im Rollenspiel eingebettet im typischen Handlungsablauf üben
- Möglichst echtes (Spiel-)Material verwenden
- Während der Übungsphase überwachen, dass das zu prozeduralisierende Verfahren korrekt angewendet wird.

7 Intelligent

Kurz zusammengefasst: Üben hat im Bereich Mathematik und Rechnen im Rahmen der beruflichen Bildung sehr wohl seinen Platz. Damit es seinen Zweck erfüllt, muss aber intelligent geübt werden. Intelligent insofern, als dass

- unterschieden wird, zu welchem Zweck geübt wird (Üben 1 bis 4)
- die Übungen so geplant sind, dass sie optimal dem jeweiligen Zweck entsprechen
- die Intelligenz der Lernenden nicht beleidigt sondern gefordert wird.

8 Zum Vertiefen

Mehr zu den Wissensarten und Lernaufgaben:
Online auf www.hrkll.ch unter IML2

Zur Frage, woher man denn das über die verschiedenen Wissensarten weiss:
Kaiser, H. (2005). *Wirksames Wissen aufbauen - ein integrierendes Modell des Lernens*. Bern: h.e.p. verlag.

Zum „intelligenten Üben“ (Üben 3):
Leuders, T. (2009). Intelligent üben und Mathematik erleben. In L. Hefendehl-Hebeker, T. Leuders & H.-G. Weigand (Eds.), *Mathemagische Momente* (pp. 130-143). Berlin: Cornelsen.

Beispiele von Lernumgebungen, welche Üben 1 und Üben 2 unterstützen:
www.hotelgastro.ch/download.cfm?ID_n=250&unter=250&haupt=95&language=1 auf der unteren Seitenhälfte ("Berechnungen")

Zur Frage, was es ausser Üben bei Rechnen und Mathematik in der Berufsbildung sonst noch zu überlegen gibt:
Kaiser, H. (2010). *Rechnen und Mathematik anwendungsbezogen unterrichten*. Winterthur: Edition Swissmem.