

Intelligentes Üben

Hansruedi Kaiser

August 2010

Routine beim Rechnen entlastet das Denken und macht Kapazität für das Nachdenken frei. Lernende, die 4 plus 3 jedes Mal an den Fingern abzählen müssen, können nicht gleichzeitig auch noch überwachen, ob das, was sie gerade tun, auch sinnvoll und zielführend ist. Eine gewisse Routine, der Aufbau von gut prozeduralisiertem Wissen (Kaiser, 2005), ist beim Rechnen deshalb wichtig.

Allerdings ist der Aufwand dafür gross. Routine stellt sich nur ein, wenn entsprechende Aufgaben hunderte von Malen durchgearbeitet werden. Es lohnt sich deshalb, kritisch zu hinterfragen, ob eine bestimmte Routine tatsächlich für den beruflichen Alltag von Bedeutung ist. Ein anschauliches Beispiel dafür findet sich bei Mitarbeitern im Tiefbau: Im Zeitalter des Taschenrechners macht es wenig Sinn, dass diese routiniert mit Papier und Bleistift (oder gar im Kopf) Multiplikationen z.B. für Volumenberechnungen ausführen können. Hingegen ist es ganz nützlich, wenn sie die 24er-Reihe beherrschen, denn ein 1 cm dicker Belag wiegt pro m² 24 kg; also bei 2 cm Dicke 48 kg, bei 3 cm 72 kg etc.

Üben um des Übens willen ist eine mühsame und öde Angelegenheit. Routine kann sich aber auch als Nebenprodukt anderer Tätigkeiten einstellen. Der erfahrene Tiefbaumitarbeiter beherrscht die 24er-Reihe nicht, weil er diese im stillen Kämmerlein tagelang geübt hat; seine Routine stammt daher, dass er unzählige Male die benötigte Belagsmenge berechnen musste und dabei unzählige Male mit 24 multipliziert hat. Denselben Effekt kann man in der Schule nutzen, indem man Aufgaben stellt, die interessant und herausfordern sind und als Nebeneffekt dazu führen, dass die Lernenden etwas Bestimmtes ausgiebig üben.

Leuders (Leuders, 2009) hat eine ganze Reihe von Vorschlägen zusammengestellt, wie sich solche Aufgaben konstruieren lassen. In der Tabelle auf den nächsten Seiten sind diese Vorschläge immer anhand der Routine „Mittelwert berechnen“ illustriert, d.h. ein Ziel der Aufgaben ist es immer, dass die Lernenden möglichst oft Mittelwertberechnungen machen. Bei der allerersten Aufgabe – „Gib fünf Zahlen an, deren Durchschnitt 5 ist.“ – haben die Lernenden unter Umständen schon vier, fünf Mal einen Durchschnitt mehrere Zahlen berechnet, bis sie auch nur ein Beispiel finden.

Gleichzeitig haben solche Aufgaben aber auch noch den Effekt, dass die Lernenden nicht nur stur Rechnen üben, sondern dass sie Erfahrungen mit den Entsprechenden Grössen sammeln. Anhand der verschiedenen Beispiele in Leuders Tabelle entwickeln sie mit der Zeit ein gewisses Gefühl dafür, wodurch ein Mittelwert beeinflusst wird, wie man ihn z.B. auf eine bestimmte Seite „ziehen“ kann etc. Und damit ergibt sich so ganz nebenbei auch eine gewisse Binnendifferenzierung. Schwache Lernende werden die Aufgabe „Wie oft muss man noch die Zahl 5 zu den Zahlen 1, 2, 3, 4 hinzunehmen, damit der Durchschnitt 4 ist?“ wohl einfach dadurch lösen, dass sie eine 5 nach der anderen hinzufügen, jedes Mal den Durchschnitt rechnen und so wie beabsichtigt üben. Starke Lernende hingegen werden sich vielleicht herausgefordert fühlen, die Frage durch Überlegen zu beantworten und sogar eine Art Gesetzmässigkeit abzuleiten.

Intelligente Übungsaufgaben zu erfinden, ist nicht besonders schwer. Wollen sich gar keine einstellen, lohnt es sich, sich mit Kolleginnen und Kollegen zusammensitzten. Dann fliessen die Ideen meist recht schnell.

Literatur

- Kaiser, H. (2005). *Wirksames Wissen aufbauen - ein integrierendes Modell des Lernens*. Bern: h.e.p. verlag.
- Leuders, T. (2009). Intelligent üben und Mathematik erleben. In L. Hefendehl-Hebeker, T. Leuders & H.-G. Weigand (Eds.), *Mathemagische Momente* (pp. 130-143). Berlin: Cornelsen.

Techniken für das Erzeugen produktiver Übungsaufgaben (Timo Leuders, 2009)

Aufgabentyp:			
Probleme lösen	Fragetyp		Aufgabenbeispiele
Operatives Durcharbeiten von Umkehraufgaben/Aufgaben mit Parametern	Umkehrfrage	Wann kommt ... heraus?	<ul style="list-style-type: none"> Gib fünf Zahlen an, deren Durchschnitt 5 ist. Gib zwei weitere Beispiele an. Wie oft muss man noch die Zahl 5 zu den Zahlen 1, 2, 3, 4 hinzunehmen, damit der Durchschnitt 4 ist?
	Optimierung	Wann ist ... am größten/kleinsten/besten?	<ul style="list-style-type: none"> Du hast die drei Datenreihen: 1, 1, 8 3, 3 1, 2, 3, 4, 5 Bei welcher der drei erhöht sich der Durchschnitt am meisten, wenn man noch eine 6 hinzunimmt? Warum?
	Funktionale Abhängigkeit	Was passiert wenn ...?	<ul style="list-style-type: none"> Was ändert sich am Durchschnitt der folgenden Zahlenreihe 6, 10, 12, 16, wenn man <ol style="list-style-type: none"> alle Werte halbiert? alle Werte um 1 erhöht? den Durchschnittswert noch hinzufügt.
	Kombinatorische Ausschöpfung	Wie viele Möglichkeiten gibt es ...? Wie lauten alle Möglichkeiten ...?	<ul style="list-style-type: none"> Wie viele verschiedene Durchschnitte kannst du errechnen, wenn du nur die Zahlen 1, 2, 3, 4 und 5 zur Verfügung hast? <ol style="list-style-type: none"> Du darfst jede Zahl höchstens einmal nehmen. Du darfst jede Zahl auch mehrfach nehmen. Was ist jetzt der größte und kleinste Wert, den du bekommst?
Spielerisches Auseinandersetzen mit Spielsituationen	Übungsspiel	Spielt miteinander.	<ul style="list-style-type: none"> Jeder Mitspieler wirft einen Würfel. Alle werfen zudem noch zusammen 2 Würfel. Nun muss jeder mit Würfeln aus der Mitte sein eigenes Würfelergbnis als Durchschnitt legen.
	Spielanalyse	Findet eine gute Strategie.	<ul style="list-style-type: none"> Mit welchen Strategien kann man beim vorigen Spiel einfache Lösungen finden? Wie findet man weniger nahe liegende Lösungen?
Eigene Aufgaben erarbeiten mit Musteraufgaben	Variieren	Verändere die Aufgaben (Welche kannst du noch ebenso bearbeiten, welche nicht? Warum?)	<ul style="list-style-type: none"> „Wie kann man mit zehn Würfelergbnissen den Durchschnitt 4, 5 erhalten?“ – Löse die Aufgabe, verändere sie und untersuche, welche Varianten noch lösbar sind.

Aufgabentyp:			
Strukturen reflektieren	Fragetyp		Aufgabenbeispiele
Muster erkennen und erzeugen in strukturierten Aufgabenserien	Muster suchen	Welche Muster kannst du entdecken?	<ul style="list-style-type: none"> Bilde die Durchschnitte der folgenden Datenreihen: 10, 11, 12, 13, 14 1, 12, 13, 14, 15 Welche Besonderheiten oder Zusammenhänge kannst du erkennen? Kannst du deine Beobachtungen begründen?
	Muster fortsetzen	Wie lässt sich das Muster fortsetzen?	<ul style="list-style-type: none"> Bilde die Durchschnitte der folgenden Datenreihen: 1, 3 1, 3, 5 1, 3, 5, 7 a) Setze die Reihe fort und berechne die Durchschnitte. b) Erfinde eigene, ähnliche Reihen und berechne sie.
	Analogisieren	Wie lauten ähnliche Aufgaben? (Warum sind sie ähnlich?)	<ul style="list-style-type: none"> Bilde die Durchschnitte der folgenden Datenreihen: 3, 4, 7, 8 5, 6, 10, 11 12, 13, 21, 22 Was haben die Aufgaben gemeinsam? Bilde eigene Weitere.
Strukturieren von unstrukturierten Aufgabengruppen	Sortieren/ Klassifizieren	Bilde Gruppen ... je nach Lösbarkeit/ Typ/...	<ul style="list-style-type: none"> Sortiere die folgenden Aufgaben erst in ähnliche Gruppen, bevor du die Durchschnitte berechnest: a) 1, 2, 7 b) 10, 50, 80 c) 31, 33, 37 d) 110, 150, 180 e) 100, 200, 700
	Passung prüfen	Welches Beispiel passt nicht? Warum?	<ul style="list-style-type: none"> Welche Datenreihe passt nicht zu den anderen? Was bedeutet das für den Durchschnitt? a) 5, 10, 15 b) 1, 10, 100 c) 200, 220, 240 d) 5, 8, 11
	Bewerten	Suche die schwierigsten/leichtesten/ungewöhnlichen heraus	<ul style="list-style-type: none"> Suche zunächst die Durchschnitte heraus, die du ohne zu rechnen bestimmen kannst: a) 4, 5, 5, 5, 5, 6 b) 8, 10, 12, 14 c) 4, 6, 10 d) 10, 5, 5, 5, 10 e) 1, 3, 5, 6 f) 11, 12, 14, 15
Argumentieren an gestellten/gelösten Aufgaben	Muster begründen	Wieso kommt dieses Muster heraus?	<ul style="list-style-type: none"> Wie ändert sich der Durchschnitt von Datenreihe zu Datenreihe? Warum? 5, 8, 10, 12 6, 9, 11, 13 7, 10, 12, 14
	Darstellen	Wie kann man die Situation anders darstellen? (grafisch, rechnerisch, ...)	<ul style="list-style-type: none"> Berechne den Durchschnitt und begründe das Ergebnis am Zahlenstrahl: 1, 3, 5, 10, 12, 14
	Richtigkeit/ Gültigkeit	Welche Aufgabe ist unmöglich/sinnvoll? Stimmt die Behauptung? Warum?	<ul style="list-style-type: none"> „Bei vier Zahlen liegt der Durchschnitt immer zwischen den mittleren beiden“ – Stimmt das? Begründe oder widerlege.
	Fehler finden	Was ist hier falsch? Warum? Wie kann man es besser machen?	<ul style="list-style-type: none"> „Der Durchschnitt von 1, 2, 3, 4, 5 ist 3. Wenn jetzt noch eine 5 dazukommt, wird der Durchschnitt um 1 größer.“ Prüfe und begründe.

Aufgabentyp:			
Anwendungen erkunden	Fragetyp		Aufgabenbeispiele
Anwenden auf Beispielsituationen/Sachsituationen*	an Beispielen anwenden	Wende ... bei der Bearbeitung folgender Situationen an.	<ul style="list-style-type: none"> • Michaela ist beim Weitsprung 2,30 m und 2,45 m gesprungen. Sie möchte auf einen Durchschnitt von 2,40 m in drei Sprüngen kommen.
	Anwendbarkeit reflektieren	Kann man ... hier anwenden. Warum (nicht)?	<ul style="list-style-type: none"> • Welche Durchschnitte von zwei Personen kann man nicht bilden, auch wenn man alle Daten kennt? Warum? a) die Körpergröße b) die Augenfarbe c) das Taschengeld d) das Geburtsdatum
	Anwendungen erfinden	Erfinde weitere Situationen, in denen du ... anwenden kannst.	<ul style="list-style-type: none"> • Setzt euch zu viert zusammen und sammelt Daten, die ihr von euch allen vieren kennt. Bildet alle möglichen Durchschnitte.
Vernetzen mit verwandten Begriffen/Situationen	Verbindungen erfassen	Wie passt das zu ...?	<ul style="list-style-type: none"> • Kann man vergleichen, wie gut zwei Länder im Durchschnitt bei den Olympischen Spielen abschneiden? Mache Vorschläge.
	Verbindungen suchen	Wo hast du ... schon einmal gesehen/gemacht?	<ul style="list-style-type: none"> • Suche eine Woche lang in der Zeitung, wo Durchschnitte gebildet werden. Erkläre deine Beispiele.
	Übertragen	Wie lässt sich ... auf ... übertragen.	<ul style="list-style-type: none"> • Wie würdest du deine Durchschnittsgröße oder dein Durchschnittsalter in diesem Kalenderjahr berechnen?

* Leuders bildet Lehrende für die obligatorische Schulzeit aus. Entsprechend hat er unter dem Stichwort „Anwenden“ Mühe, wirklich einleuchtende Aufgaben zu kreieren. In der Berufsbildung ist das aber kein Problem. Die Lernenden können hier ohne weiteres auf ihre Erfahrungen im beruflichen Alltag zurückgreifen. (Dies setzt allerdings voraus, dass die Verfahren und Konzepte, welche die Lernenden erarbeiten sollen, wirklich einen Bezug zu ihrem beruflichen Alltag haben!)

Beispiele aus der Küche:

Crème renversée au caramel				
Personen	10	5	50	100
Zucker g	200			
Wasser dl	½			
Vollmilch ml	625			
Vanilleschoten	2			
Vollei g	190			
Eigelb g	50			
Zucker g	95			
Salz g	½			

Bauen Sie die Tabelle so aus, dass Sie jederzeit bequem die Menge für z.B. 56 Personen, 32 Personen, 311 Personen etc. herauslesen können

Erstellen Sie ähnliche Tabellen für beliebige andere Gerichte, z.B. für die Thurgauer Apfeltorte.

Sind die Personenzahlen 5, 10, 50 und 100 nützlich? Oder gibt es andere Werte, die nützlicher sind?

Wie steht es bei der Thurgauer Apfeltorte? Was machen Sie, wenn Sie Torten für 12, 30 oder 42 Personen backen müssen?