

# Fachrechnen – vom Kopf auf die Füße gestellt

Hansruedi Kaiser

Januar 2010

## 1 Der traditionelle Zugang über den Kopf

Nehmen wir an, „Prozentrechnen“ stehe auf dem Stundenplan. Traditionell spielt sich dann im Unterricht meist folgendes ab:

- A. Ausgangspunkt ist ein motivierendes Beispiel, etwa eine Ausverkaufsaktion, bei der ein begehrtes Produkt 20% günstiger zu haben ist.
- B. Anschliessend wird erklärt, was Prozente sind ( $1/100$ ), werden Begriffe eingeführt (Grundwert, Prozentsatz, Prozentwert etc.) und wird ein allgemeines Rechenverfahren vermittelt (z.B. der Dreisatz über 1%).
- C. Und zum Schluss erhalten die Lernenden Übungsbeispiele, wo sie das vermittelte allgemeine Verfahren konkret anwenden sollen.

Innerhalb dieses Ablaufs lassen sich Variationen beobachten. Manchmal entfällt Schritt A und die Instruktion setzt gleich mit der allgemeinen Erklärung ein. Manchmal streuen die Übungsbeispiele breit, d.h. es wird etwa ganz allgemein Prozentrechnen geübt (vom Zins auf dem Bankkonto über die Steigung einer Strasse bis hin zu Wahlergebnissen). Manchmal werden aber auch nur Übungen eingesetzt, die einen Bezug zum beruflichen Alltag haben (Verlustrechnungen bei den Köchen, Verdünnungsrechnungen in der Pflege etc.). Unabhängig davon liegt aber immer dieselbe didaktische Idee zu Grunde: Den Lernenden wird allgemein die entsprechende „Rechenart“ erklärt, so dass sie diese dann nach Bedarf anwenden können und sollen. Die Idee dahinter: Hat man einmal begriffen, wie z.B. Prozentrechnen „geht“, ist das sehr nützlich, denn dann kann man dieses Wissen an vielen Orten anwenden.

## 2 Warum sich die Lernenden damit so schwer tun

Wohl die meisten, die versucht haben, Lernenden Rechnen auf diesem Weg beizubringen, haben dieselben frustrierenden Erfahrungen gemacht: Viele Lernende haben erstaunlich viel Mühe, Prozentrechnen oder Ähnliches zu verstehen und das Geübte auch ausserhalb des engen Kreises der Übungsaufgaben anzuwenden. Woher kommt dies?

### 2.1 Bruchrechnen als Beispiel

„Katharina hatte, im Rahmen einer Hausaufgabe, unter ordnungsgemässer Anwendung der Bruchrechenregeln die Zahl 2 durch  $\frac{1}{4}$  dividiert und kam dann zu mir, weil sie sich über die 8 als Ergebnis wunderte. Wieso konnte das Ergebnis größer sein als der Dividend? Sie hatte doch ‚geteilt!‘ Ich versuchte ihr einsichtig zu machen, weshalb das (im Bereich positiver Zahlen) bei Division durch Zahlen, die kleiner als 1 sind, so sein muss. Als Gegenbeispiel hielt sie mir vor, wenn sie einen Apfel ‚in Viertel‘ teile, seien die Stücke aber kleiner als der Apfel. Ich wies sie auf den Unterschied zwischen ‚teilen in‘ und ‚teilen durch‘ hin. Abschließend meinte sie: ‚Okay, ich weiß jetzt, wie man das rechnen muss. Aber du willst mir doch wohl nicht weismachen, dass man in Mathe logisch denkt!‘ (Heymann, 1996, S. 207f – Heymann ist Mathematikdidaktiker!)

Das Problem ist hier, dass Katharina eine ganz bestimmte Situation, das „Teilen“ oder „Verteilen“ eines Apfels oder Kuchens auf mehrere Kinder, vor Augen hat.

Daneben gibt es aber noch andere Problemsituationen, die man zwar auch mit einer Division bewältigen kann, die aber einer ganz anderen Fragestellung entsprechen. Eine typische zweite Situation wäre die Problemsituation des „Aufteilens“ oder „Enthaltenseins“, z.B. „2 kg Mehl sollen in Säcke zu  $\frac{1}{4}$  kg abgefüllt werden. Wie viele Säcke benötigt man?“. In diesem Kontext wird kaum jemand damit Probleme haben, dass das Resultat 8 grösser ist als die Anzahl kg in der Ausgangsmenge.

Aus der Forschung weiss man, dass es mindestens neun verschiedene solche Problemsituationen gibt, welche Lernende als unterschiedlich erleben, obwohl es immer ums Dividieren geht (Gerster & Schultz, 2004). Jede dieser Problemsituationen folgt wieder eine andere Sachlogik. So ruft z.B. „Ein Teppich ist 20 m<sup>2</sup> gross. Er ist 4 m breit. Wie lang ist er?“ nochmals ein ganz anders Bild hervor als das Verteilen eines Kuchens an mehrer Personen oder das Aufteilen eines Sack Mehls auf mehrere kleine.

Alle diese Problemsituationen lassen sich aber durch dasselbe mathematische Instrument – Division einer Grösse durch eine andere – darstellen und behandeln (Abbildung 1). Und wenn man will, kann man darüber das noch viel mächtigere Werkzeug der Gleichungen mit einer Unbekannten stellen.

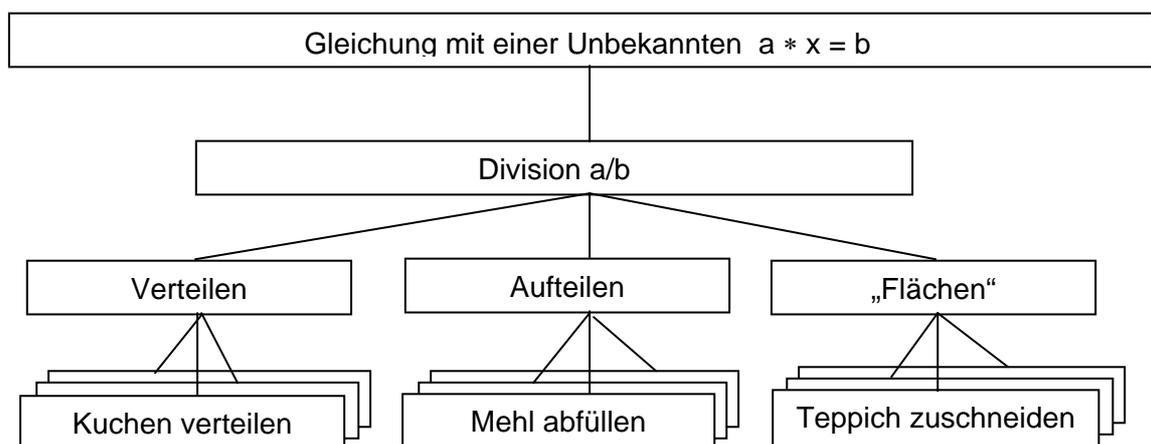


Abbildung 1: Unterschiedliche „Divisionssituationen“

## 2.2 Situatives Wissen als Basis

Katharina steht mit ihren Schwierigkeiten nicht allein dar. Sie sind in der Art begründet, wie menschliches Denken bzw. menschliches Wissen funktioniert. Grob lassen sich zwei Arten von Wissen unterscheiden:

- Deklaratives Wissen, bestehend aus abstrakten Begriffen, Konzepten etc. (wie „Grundwert“, „Prozentsatz“ aber auch Regeln wie „Zuerst den Prozentwert für 1% ermitteln“ etc.).
- Situatives Wissen, bestehend aus ganz konkreten Erinnerungen an selbst erlebte Situationen (wie z.B. eine bestimmte mit mehr oder weniger Erfolg gelöste Rechenaufgabe).

Eine gegebene Aufgabe kann man mit der einen wie der anderen Art von Wissen lösen. Setzt man deklaratives Wissen ein, dann erfolgt zuerst eine Analyse der Aufgabe mit Hilfe der vorhandenen Begrifflichkeit („Welches ist der Grundwert?“, „Was ist gesucht, was ist gegeben?“). Anschliessend wird ein Plan formuliert („Schritt 1 ..., Schritt 2 ...“) und dieser dann umgesetzt. Die oben skizzierte traditionelle Didaktik möchte die Lernenden genau zu diesem Vorgehen befähigen.

Geht man eine Aufgabe mit Hilfe des situativen Wissens an, dann spielt sich hingegen ein anderer Prozess ab: Die neue Aufgabe erinnert an ähnliche, bereits erlebte Aufgabelösungen, und diese erinnern an weitere erlebte Situationen, so dass im günstigen Fall schnell mehrere solche Erinnerungen zu Rate gezogen werden können. Aus diesen verschiedenen Erinnerungen ergibt sich dann eine Idee, wie in der neuen Situation vorzugehen ist, d.h. die neue Aufgabe wird in Analogie zu erinnerten Aufgabelösungen angegangen.

Wie die Forschung zeigt, ist die erste Art eher etwas für Computer. Menschen denken auf die zweite Art und arbeiten nur dann sicher und effizient, wenn sie auf situatives Wissen, auf Erinnerungen an konkrete Erfahrungen zurückgreifen können. Und genau das versucht Katharina, sich versucht die neue Aufgabe („2 durch  $\frac{1}{4}$ “) auf eine vertraute Situation zu beziehen und scheitert, weil sie einen ungünstigen Bezug herstellt. Um aus dieser Sackgasse herauszukommen, benötigt sie nicht eine allgemeine Erklärung zum Thema „Division mit beliebigen Zahlen“, sondern eine andere Erfahrung, die sie als Basis benutzen kann.

### 3 Ein Aufbau von den Füßen her

Das Ziel jedes Unterrichts – nicht nur des Fachrechnens – muss es deshalb sein, dass die Lernenden geeignetes situatives Wissen erwerben. Dies setzt eine andere Didaktik voraus, als wenn es darum geht, vermeintlich universell einsetzbares deklaratives Wissen zu vermitteln.

#### 3.1 Im Zentrum steht die konkrete Situation

Damit die Lernenden Erfahrungen mit einer bestimmten Art von Situation sammeln können, müssen im Zentrum des Unterrichts genau diese Situationen stehen. Das bedeutet unter anderem:

- Die konkreten Anwendungssituationen, wie z.B. das Bereitstellen der richtigen Menge von Zutaten für ein Gericht aufgrund eines Rezeptes, haben nicht nur die Rolle von „motivierenden Einstiegen“ und „Übungsaufgaben“. Sie dürfen während keinem Moment des Unterrichts aus den Augen verloren werden.
- Diese Situationen sind nicht Beispiele für eine Rechentechnik (z.B. „Dreisatz“), sondern echte Situationen, wie sie im Berufsalltag auftreten.
- Wie alle echten Berufssituationen sind sie vielschichtig und bestehen nicht nur aus den Daten, welche für die eigentliche Rechnung gebraucht werden. All ihre Aspekte sind wichtig, damit ein sicheres, situatives Problemlösen funktionieren kann. Z.B. können bestimmte Aspekte bei der Kontrolle von Rechenresultaten eine wichtige Rolle spielen.
- Wirklich in Kontakt kommen die Lernenden mit echten Berufssituationen nur im Betrieb. Das bedeutet, dass es erst dann Sinn macht, eine Situation zu behandeln, wenn möglichst viele Lernende damit schon Erfahrungen gemacht haben.

#### 3.2 Angepasste Kreise von Situationen bilden

Erfahrungen, welche mit einer bestimmten Art von Situationen gemacht wurden, lassen sich nur dann in einer neuen Situation nutzen, wenn diese neue Situation als ähnlich zu den schon erlebten Situationen erkannt wird.

Ähnlichkeit kann auf verschiedenen Abstraktionsebenen gefunden werden. Katharinas Vater erkennt als Mathematiker eine Ähnlichkeit zwischen den Situationen „Verteilen“ und „Aufteilen“, welche Katharina selbst nicht erkennen kann. Natürlich ist es nützlich, wenn die Lernenden Ähnlichkeiten auf einem möglichst abstrakten Niveau erkennen können, denn dadurch können sie ihre Erfahrungen in vielen verschiedenen Bereichen nutzbar machen.

Aber wie die Erfahrung zeigt, sind viele Lernende schnell einmal überfordert, wenn solche Ähnlichkeiten einen bestimmten Abstraktionsgrad übersteigen. Oft ist es deshalb sinnvoller, zwei verschiedene Anwendungskontexte wie „Teilen“ und „Verteilen“ zu unterscheiden und unterschiedlich zu behandeln, auch wenn sie, mit genügend mathematischen Hintergrundwissen analysiert, dieselbe Struktur aufweisen. Es lohnt sich hier, pragmatisch vorzugehen und Situationen, welche von den Lernenden nicht offensichtlich als gleich erkannt werden, als unterschiedlich zu behandeln (z.B. „Berechnen eines Rabatts“ und „Berechnen des Kochverlustes“). Fühlen sich die Lernenden dann in jeder dieser Situationen zuhause und bleibt Zeit, kann man anschliessend immer noch versuchen, die Ähnlichkeit zwischen diesen Situationen herauszuarbeiten, so weit die Lernenden folgen mögen.

### 3.3 Schritt für Schritt

Ganz konkret gilt es folgende Schritte zu tun, damit die Lernenden beim Fachrechnen fest auf ihren Füssen stehen:

1. Eine Liste von Situationen zusammenstellen, welche von den Lernenden vermutlich als unterschiedlich wahrgenommen werden.
2. Jede dieser Situationen separat behandeln und jede nach Möglichkeit erst dann in Angriff nehmen, wenn die Lernenden im Betrieb damit schon Erfahrungen gemacht haben. Diese Erfahrungen müssen nicht den „rechnerischen“ Teil der Situation betreffen. Andere Aspekte sind genau so wichtig.
3. Sicher stellen, dass die Lernenden bei jeder Situation immer die Verbindung zu ihren Erlebnissen im Betrieb herstellen können. Zahlenbeispiel, wie sie im Betrieb nie vorkommen, stören diese Verbindung, ebenso Berechnungsvorgänge, wie sie im Betrieb nicht auftreten.
4. Die Situationen nicht dazu missbrauchen, allgemeine Verfahren wie Prozentrechnen, Dreisatz etc. zu üben. Ziel ist, dass die Lernenden ganz spezifisch mit dem gerade behandelten Typ von Situationen umgehen können. Das umfasst einerseits auch nicht „rechnerische“ Aspekte der Situation. Und andererseits ist oft ein genau auf die Situation abgestimmtes mathematisches Instrument sinnvoller, als ein allgemeines Berechnungsverfahren.
5. Das für die berufliche Qualifikation relevante Lernziel ist erreicht, wenn die Lernenden realistische Beispiele für jeden der behandelten Situationstypen erfolgreich bearbeiten können.
6. Bleibt Zeit und zeigen die Lernenden Interesse, kann man anschliessend versuchen, mit den Lernenden allfällige Ähnlichkeiten zwischen den Situationen herauszuarbeiten.
7. Vermutlich wird es notwendig sein, die Liste der Situationen auf Grund der Erfahrungen im Unterricht in mehreren Überarbeitungszyklen anzupassen. Es kann sein, dass sich eine Situation als zu breit erweist und in zwei verschiedene aufgespaltet werden muss. Und genauso ist natürlich auch das Umgekehrte möglich.

## 4 Das Material

Um diese Art von Didaktik zu unterstützen, welche das Fachrechnen eng mit dem übrigen Fachunterricht verzahnt, stehen folgende Materialien zur Verfügung:

Eine erste **Liste** von sechs Situationen, die den Anspruch erhebt, alle „Rechensituationen“ abzudecken, auf die ein Koch/eine Köchin EFZ vorbereitet sein muss:

- Rezepte umrechnen – Wie viele Eier muss ich aufschlagen?
- Gefässe wählen – Wie viele Förmchen brauche ich?
- Zeitmanagement – Wann muss der Braten in den Ofen?
- Verlustrechnung – Wie viel muss ich einkaufen/bestellen?
- Preiskalkulation – Verdienen wir überhaupt etwas?
- Optimierungsmöglichkeiten – Soll ich ganze Fische bestellen oder Filets?

Zu jeder dieser Situation ein A3 Blatt als situationszentrierte **Lernumgebungen**. Jede Lernumgebung enthält:

- Eine kurze Situationsbeschreibung
- Überlegungsaufgaben zum Verständnis der Situation
- Zentrale Angaben, Grössen etc.
- Angepasste mathematische Instrumente
- Übungsaufgaben zum Einsatz der Instrumente
- Überlegungsaufgaben zu den Stärken und Schwächen der Instrumente
- Eine kurze Anleitung zum Arbeiten mit der Lernumgebung

## 5 Literatur

Gerster, H.-D., & Schultz, R. (2004). *Schwierigkeiten beim Erwerb mathematischer Konzepte im Anfangsunterricht. Bericht zum Forschungsprojekt "Rechenschwäche – Erkennen, Beheben, Vorbeugen"*. Freiburg i.Br.: Pädagogische Hochschule Freiburg, Institut für Mathematik und Informatik und ihre Didaktiken.

Heymann, H. W. (1996). *Allgemeinbildung und Mathematik* (Vol. 13). Weinheim: Beltz.

Kaiser, H. (2010, Mai?). *Rechnen und Mathematik anwendungsbezogen unterrichten*. Winterthur: Edition Swissmem.

## **6 Ein konkreter didaktischer Vorschlag**

### **6.1 Erst beginnen, wenn Lernende dazu schon Erfahrungen gemacht haben**

Mit der Behandlung einer Situation zuwarten, bis möglichst viele der Lernenden mit grosser Sicherheit schon Erfahrungen mit der entsprechenden Situation gemacht haben. Die Erfahrungen lassen sich anreichern, indem man den Lernenden entsprechende Beobachtungsaufträge gibt.

### **6.2 Erfahrungen schildern lassen - nicht nur „rechnerische“ Aspekte, anderes ist genau so wichtig**

Die Situation im schulischen Unterricht lebendig werden lassen, indem man die Lernenden von ihren Erfahrungen erzählen lässt. Ging ein Beobachtungsauftrag voraus, existiert mehr „Material“ für diese Erzählungen. Die „kalkulatorischen“ Aspekte sind dabei wichtig, vieles andere ist aber für ein Verständnis der Situation genau so wichtig.

### **6.3 Mittelschwere Aufgabe stellen und die Lernenden in Gruppen erarbeiten lassen, wie sie diese mit ihrem bereits vorhandenen Wissen angehen würden**

Das vorhandene Vorwissen der Lernenden aufgreifen, indem man ihnen ohne weitere Instruktion eine entsprechende Aufgabe (z.B. Rezept umrechnen) stellt. Die Aufgabe sollte nicht so schwer sein, dass die Lernenden keine Chance haben, auch nur annähernd an eine Lösung zu kommen. Sie sollte aber eine echte Aufgabe sein, welche die reale Komplexität der Situation einfängt und die Lernenden etwas herausfordert. Die Aufgabe in Gruppen bearbeiten lassen.

### **6.4 Die Lösungen der Lernenden gemeinsam kritisch besprechen**

Die einzelnen Gruppen reihum ihre Lösungen vorstellen lassen und Stärken und Schwächen diskutieren. Die „Fragen zum Überlegen“ können hier helfen, um das Vorgehen der einzelnen Gruppen kritisch zu analysieren. Wichtig ist dabei, dass nicht nur Schwächen herausgearbeitet werden, sondern auch Stärken, welche in der folgenden modellhaften Lösung aufgenommen werden können.

### **6.5 Werkzeuge einführen, Benutzung an realistischem Beispiel modellhaft vormachen**

An einer Beispielaufgabe eine Lösung modellhaft vormachen. Dabei nicht eine perfekte Vorstellung bieten, sondern durch lautes Denken erkennen lassen, was man sich alles Schritt für Schritt überlegen muss. In diesem Zusammenhang die Werkzeuge aus der Lernumgebung einführen.

### **6.6 Lernende eigene Beispiele erfinden lassen, bis sie sich sicher fühlen**

Für die eigentliche Übungsphase ausgehend von den Beispielen in der Lernumgebung die Lernenden eigene Beispiele erfinden lassen. Anhand dieser Beispiele die Lernenden üben lassen (eventuell zuerst im Plenum, dann in Gruppen), bis sie sich sicher fühlen. Zu Beginn brauchen sie dabei Unterstützung (sowohl beim Erfinden der Beispiele wie beim Lösen), mit der Zeit kann und muss diese wegfallen. Gegen Schluss spontan zusätzliche Schwierigkeiten in die Beispiele der Lernenden einbauen.

### **6.7 Zentrale Daten erarbeiten, Spickzettel erarbeiten**

Mit den Lernenden zusammen zentrale Grössen zusammentragen, die man einfach kennen muss, um den Arbeitsablauf durch nachschlagen bzw. nachrechnen nicht zu behindern (Lehrerinput, Nachschalen in Fachbüchern). Lernende persönliche Spickzettel schreiben lassen (in einem Format, das sie während der Arbeit auf sich tragen und konsultieren können).

### **6.8 Anwendung im Betrieb diskutieren**

Im Plenum gemeinsam diskutieren, wie und wann das Gelernte im Betrieb genutzt werden kann und welche Schwierigkeiten sich dabei ergeben könnten. Die „Fragen zum Überlegen“ können dabei als Anregungen dienen.