Hansruedi Kaiser

Bausteine für ein Konzept zur Förderung alltagsmathematischer Kompetenz

Teil 1
Alltagsmathematik – eine Einführung
Aktuelle Kursbeispiele

Teil 2
Didaktisches Begleitmaterial

SVEB
FSEA

Schweizerischer Verband für Weiterbildung
Fédération suisse pour la formation continue
Federazione svizzera per la formazione continua
Swiss Federation for Adult Learning

Schweizerischer Verband für Weiterbildung
Oerlikonerstrasse 38
8057 Zürich

Im Auftrag des
Staatssekretariats für Wirtschaft SECO

Schweizerische Eidgenossenschaft
Confédération suisse
Confederazione Svizzera
Confederaziun svizra

Eidgenössisches Volkswirtschaftsdepartement EVD
Staatssekretariat für Wirtschaft SECO

4.5 Situative vs. abstrakte Konzepte

4.5.1 Verteilen und Aufteilen

Kompetenz gleich welcher Art ist situationsgebunden. Wenn eine Person eine bestimmte Situation kompetent bewältigen kann, ist damit noch lange nicht gesagt, dass ihr dies in einer anderen, vermeintlich ähnlichen Situation auch gelingt. Dies gilt auch für mathematische Kompetenz jeglicher Art. Eine kleine Geschichte als Beispiel, erzählt von Hans Heymann, Mathematikdidaktiker[20]:

„Eine charakteristische Szene mit meiner Tochter Katharina – seinerzeit 13 Jahre alt und dem Fach Mathematik nicht sonderlich zugetan – erlaubt Vermutungen darüber, durch welche Missverständnisse die Kluft zwischen dem [akademisch] mathematischen und dem Alltagsdenken zustande kommt: Katharina hatte, im Rahmen einer Hausaufgabe, unter ordnungsgemässer Anwendung der Bruchrechenregeln die Zahl 2 durch ¼ dividiert und kam dann zu mir, weil sie sich über die 8 als Ergebnis wunderte. Wieso konnte das Ergebnis grösser sein als der Dividend? Sie hatte doch ‚geteilt'! Ich versuchte ihr einsichtig zu machen, weshalb das so sein muss. Als Gegenbeispiel hielt sie mir vor, wenn sie einen Apfel ‚in Viertel' teile, seien die Stücke aber kleiner als der Apfel. Ich wies sie auf den Unterschied zwischen ‚teilen in' und ‚teilen durch' hin. Abschliessend meinte sie: ‚Okay, ich weiss jetzt, wie man das rechnen muss. Aber du willst mir doch wohl nicht weismachen, dass man in Mathe logisch denkt!'"

Das Problem ist hier, dass Katharina eine ganz bestimmte Situation – das „Teilen" oder „Verteilen" eines Apfels oder Kuchens auf mehrere Kinder – vor Augen hat. Daneben gibt es aber noch andere Situationen, die man zwar auch mit Dividieren bewältigen kann, die aber einer ganz anderen Fragestellung entsprechen. Eine typische zweite solche Situation wäre das „Aufteilen" oder „Enthaltensein". Beispielsweise: „2 kg Mehl sollen in Säcke zu ¼ kg abgefüllt werden. Wie viele Säcke benötigt man?". In diesem Kontext bereitet es überhaupt keine Mühe zu akzeptieren, dass das Resultat (8) grösser ist, als die Anzahl Kilogramm in der Ausgangsmenge.

Aus der Forschung[21] weiss man, dass sich im Zusammenhang des Dividierens eine Vielzahl solcher Situationen unterscheiden lassen. Und die meisten davon lassen sowohl eine Frage nach dem Muster „Verteilen" wie eine Frage nach dem Muster „Aufteilen" zu (vgl. *Tab.* am Ende des Dokuments). Jeder dieser Situationen liegt eine andere Sachlogik zugrunde. So ruft z.B. „Ein Teppich ist 20 m² gross. Er ist 4 m breit. Wie lang ist er?" wieder ein ganz anderes Bild hervor als das Verteilen eines Kuchens auf mehrere Personen oder das Aufteilen eines Sack Mehls auf mehrere kleine Säcke.

All diese Sachverhalte kann die „akademische Mathematik" durch dasselbe mathematische Konzept der Division einer Grösse durch eine andere darstellen und behandeln. Aber damit allein lässt sich im Alltag eine entsprechende Aufgabe nicht schnell und sicher lösen. Zusätz-

[20] Heymann, H. W. (1996). *Allgemeinbildung und Mathematik (Vol. 13).* Weinheim: Beltz. S. 207f (Das Zitat ist leicht gekürzt)

[21] Gerster, H.-D., & Schultz, R. (2004). Schwierigkeiten beim Erwerb mathematischer Konzepte im Anfangsunterricht. *Bericht zum Forschungsprojekt "Rechenschwäche – Erkennen, Beheben, Vorbeugen". Freiburg i.Br.: Pädagogische Hochschule Freiburg, Institut für Mathematik und Informatik und ihre Didaktiken.*

lich braucht es auch eine Vorstellung dessen, was in der Situation tatsächlich geschieht[22]. Diese hilft unter anderem abzuschätzen, ob das Resultat in etwa stimmt. Erhält man z.B. beim Verteilen von Äpfeln an Kinder pro Kind mehr Äpfel als ursprünglich zur Verfügung standen, dann kann da etwas nicht stimmen.

Dass Kompetenz im Sinne von „eine alltagsmathematische Aufgabe sicher und schnell lösen können" situationsgebunden ist, erkennt man gut, wenn man kompetente Leute danach fragt, ob das Resultat einer bestimmten Berechnung zutreffen kann. Je nach Situation erhält man ganz andere Begründungen:

- Vier Kinder teilen sich zwei Äpfel: Dies ergibt einen Apfel auf je zwei Kinder, also einen halben Apfel pro Kind.
- 2 kg Mehl sollen in Säcke zu ¼ kg abgefüllt werden: Für ein Kilogramm braucht es vier Säcke, also insgesamt 8 Säcke.
- Ein Teppich ist 20 m² gross. Er ist 4 m breit: Wenn man sich den Teppich in der Längsrichtung vor sich liegend vorstellt, dann hat vorne eine Reihe von vier Quadratmetern Platz. Dahinter kann eine weitere Reihe hingelegt werden usw. Insgesamt haben fünf solche Reihen Platz, also ist der Teppich fünf Meter lang.

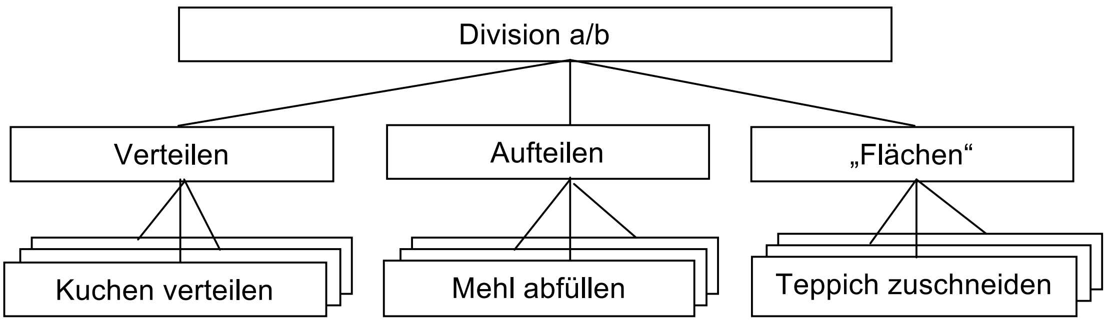

Abb. 8: Verteilen und Aufteilen als Spezialfälle des Dividierens

„Dividieren können" ist also als allgemeine mathematische Kompetenz ein hoch gestecktes Ziel. Um von einer derartigen Kompetenz sprechen zu können, ist zum einen notwendig, dass eine Person in einer Vielzahl von gängigen Situationen je über eine entsprechende situative Kompetenz verfügt. Zum anderen muss sie, wenn eine neue, noch unvertraute Situation auftaucht, in der Lage sein, sich schnell in deren Eigenarten hineinzudenken. Wer das kann, hat natürlich einen Vorteil. Für viele ist dies aber ein zu hoch gestecktes Ziel – zu hoch, für das, was sie erreichen können, aber auch zu hoch, für das, was sie erreichen müssen, um im (beruflichen) Alltag zurechtzukommen.

[22] Vergnaud, G. (1990). Epistemology and Psychology of Mathematics Education. In: Nesher, P. & Kilpatrick, J.: Mathematics and Cognition. A Research Synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Cambridge MA., Cambridge University Press: 14-80.

4.5.2 Abstrakte und weniger abstrakte Konzepte

1. Dividieren

Die verschiedenen Ebenen in *Abb. 8* können als immer abstraktere und dadurch vielseitigere Instrumente verstanden werden, mit denen sich eine immer grössere Menge konkreter Aufgaben bearbeiten lässt. Diese Pyramide lässt sich nach oben ohne weiteres noch um einige Stufen erweitern. Wie die zweitoberste Zeile in *Tab.* (am Ende des Dokuments) mit den Sachsituationen zur Division illustriert, kann man die Division a/b wiederum als ein Spezialfall eines noch viel mächtigern Werkzeugs verstehen, nämlich des Auflösens einer Gleichung mit einer Unbekannten (*Abb. 9).*

Jede dieser Ebenen hat ihre Berechtigung. Entscheidend ist, dass man je nach Zielgruppe für die Lernenden jenes Werkzeug wählt, welches sie beherrschen können.

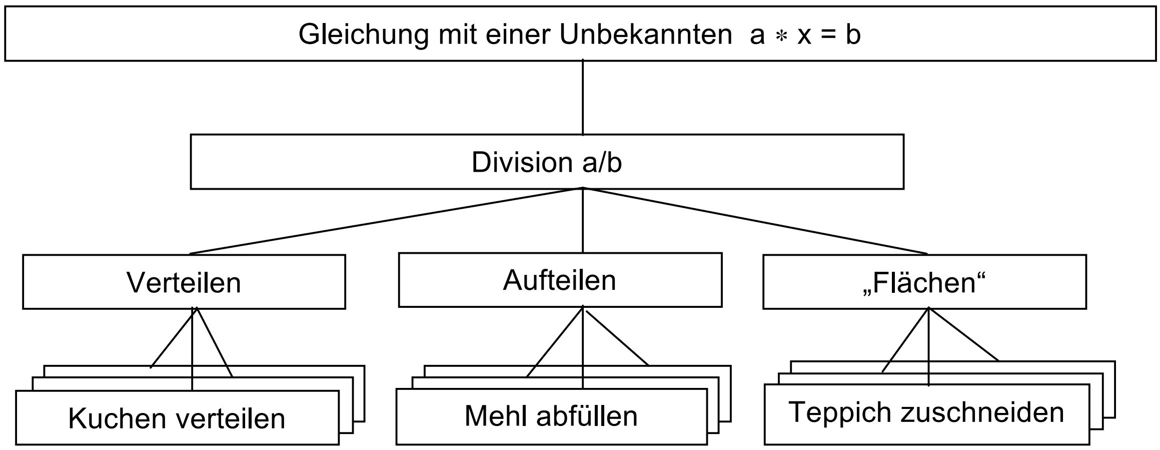

Abb. 9: Stufen immer mächtigerer mathematischer Werkzeuge

2. Dreisatz

Eine ähnliche Hierarchie von immer abstrakteren Konzepten lässt sich für Problemstellungen finden, die mit einem Dreisatz angegangen werden können:

- Am einfachsten sind parallele Skalen, d.h. graphische Darstellungen oder mentale Vorstellungen, die es erlauben, gekoppelte Grössen im Gleichschritt zu variieren23.
- Etwas mächtiger ist dann der eigentliche Dreisatz, die zwei Schritte von a Einheiten zu einer Einheit und dann von einer Einheit zu b Einheiten.
- Noch vielseitiger ist das Konzept von zwei gleichen Proportionen (das dann auch gleich neu die Idee der „umgekehrten“ Proportionalität ins Spiel bringt)
- Und all diese Konzepte lassen sich wieder als Spezialfall einer Gleichung mit einer Unbekannten verstehen.

---

[23] Hoyles, C., Noss, R., & Pozzi, S. (2001). Proportional Reasoning in Nursing Practice. *Journal for Research in Mathematics Education, 32*(1), 4-27.

Gleichung mit einer Unbekannten
a / b = X /d

Gleiche Proportionen a / b = c /d

Dreisatz
4 mal gleich 20
1 mal gleich 5
7 mal gleich 35

Parallele Skalen

30	45
20	30
10	15

3. Mathematische Beweise

Im Internet findet sich folgender Gedankenlesetrick:

(http://www.prophezeiungsforum.de/scripte/Gedankenleser.htm)

- Denke an eine zweistellige Zahl (zum Beispiel: 54)
- Ziehe beide vorkommenden Zahlen von der ursprünglichen Zahl ab (Beispiel: 54 - 5 - 4 = ergibt 45)
- Suche in der Liste das Resultat und merke Dir das dazugehörige Symbol.
- **Konzentriere Dich stark auf das Symbol**. Klicke auf das graue Feld (hier nicht abgebildet) und deine Gedanken werden gelesen.

99	m	98	d	97	i	96	I	95	m	94	o	93	T	92	^	91	_	90	^
89	N	88	6	87	o	86	I	85	n	84	d	83	d	82	U	81	I	80	f
79	6	78	U	77	f	76	I	75	o	74	^	73	o	72	I	71	b	70	v
69	{	68	U	67	h	66	I	65	S	64	J	63	I	62	M	61	b	60	n
59	J	58	b	57	_	56	R	55	{	54	I	53	I	52	^	51	x	50	N
49	x	48	f	47	n	46	v	45	I	44	R	43	x	42	d	41	m	40	f
39	o	38	T	37	R	36	I	35	v	34	M	33	z	32	i	31	^	30	i
29	{	28	I	27	I	26	h	25	U	24	T	23	I	22	{	21	v	20	d
19	z	18	I	17	I	16	h	15	J	14	v	13	J	12	x	11	O	10	I
9	I	8	n	7	T	6	T	5	f	4	u	3	i	2	b	1	U	0	I

Der Trick funktioniert immer. Egal welche Zahl man wählt, im grauen Feld scheint das zum Resultat der entsprechenden Rechnung gehörige Symbol.

Erklärungen:

1. Wenn man zuerst die „Einer“ abzieht, kann als Zwischenresultat nur 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80 oder 90 auftreten. So sieht man leicht, dass die Rechnung nur die Resultate 9, 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72 und 81 ergeben kann. All diese Zahlen haben in der Tabelle dasselbe Symbol, das dann natürlich auch erscheint. (Damit der Trick nicht allzu sehr auffällt, wird im Internet bei jedem Versuch eine neue Tabelle generiert).
2. Wenn man zuerst die „Einer“ abzieht, erhält man eine Zahl der Zehnerreihe. Nun ist $10 = 9 + 1$, $20 = 2 \cdot 10 = 2 \cdot 9 + 2$ usw. D.h. wenn man von einer Zahl der Zehnerreihe die „Zehner“ abzieht, erhält man immer eine Zahl der Neunerreihe. Die Neunerreihe liegt in der Tabelle auf der Diagonale von unten links nach oben rechts. Und in allen Feldern dieser Diagonale steht dasselbe Symbol.
3. Eine zweistellige Zahl kann man als $10 \cdot x + y$ schreiben, wobei x und y einstelligen Zahlen sind. Die Rechnung, die durchgeführt werden muss, lautet dann $10 \cdot x + y - x – y = 9 \cdot x$. Das Resultat ist also immer durch 9 teilbar und alle durch 9 teilbaren Zahlen in der Tabelle haben dasselbe Symbol zugeordnet.

Alle drei Erklärungen sind korrekte und überzeugende mathematische Beweise. Sie arbeiten aber mit immer abstrakteren mathematischen Konzepten.

		Aufteilen (quotitive Division)	**Verteilen** (partitive Division)
	Multiplikation a □ b = ?	Division ? □ b = c Multiplikator (Anzahl der Portionen) gesucht	Division a □ ? = b Multiplikand (Grösse der Portionen) gesucht
1. Vervielfachung von Grössen	Geg.: Anzahl u. Grösse d. Teilportionen	Geg.: Das Ganze und **Grösse** der Teilportionen	Geg.: Das Ganze und **Anzahl** der Teilportionen
1.1 Teile-Ganzes-Struktur *1.1.1 Räumlich-simultan*	3 Tüten, in jeder 4 Äpfel.	Insgesamt 12 Äpfel. In jede Tüte 4 Äpfel.	Insgesamt 12 Äpfel. In 4 Tüten.
	3 Schnüre, jede 4 m lang.	Insgesamt 12 m. Jedes Stück 4 m.	Insgesamt 12 m. Teilen in 4 gleiche Stücke.
	3 Gefässe, jedes fasst 4 l.	Insgesamt 12 l. In jedes Gefässe 4 l.	Insgesamt 12 l. Verteilen auf 4 gleiche Gefässe.
1.1.2 Zeitlich-sukzessiv	3-mal gehen. Jedes Mal 4 Äpfel holen.	Insgesamt 12 Äpfel holen. Jedes Mal 4 Äpfel.	Insgesamt 12 Äpfel holen. 4-mal gehen.
	3-mal gehen. Jedes Mal 4 kg holen.	Insgesamt 12 kg holen. Jedes Mal 4 kg.	Insgesamt 12 kg holen. 4-mal gehen.
	In 1 Tüte 4 Äpfel. Wie viele Äpfel in 3 Tüten?	In eine Tüte 4 Äpfel. Wie viele Tüten für 12 Äpfel?	12 Äpfel sollen in 4 Tüten abgepackt werden. Wie viele kommen in eine Tüte?
1.2 Proportionalitäts-struktur	In 1 h 4 km. Wie viele km in 3 h?	In 1 h 4 km. Wie lange für 12 km?	In 4 h ging er 12 km. Wie viele km in 1 h?
	4 DM pro kg. Wie viel kosten 3 kg?	1 kg kostet 4 DM. Wie viele kg für 12 DM?	4 kg Äpfel kosten 12 DM. Wie viel kostet 1 kg?
1.3 Massumwandlung	1 Zoll sind 2,54 cm. Wie viele cm sind 3 Zoll?	1 Zoll sind 2,54 cm. Wie viel Zoll sind 7,62 cm?	4 Zoll sind 10,16 cm. Wie viele cm ist 1 Zoll?
1.4 Multiplikativer Vergleich zweier Grössen	A hat 4 Äpfel. B hat 3-mal so viele.	A hat 4 Äpfel, B hat 12 Ä. Wievielmal so viel?	B hat 12 Äpfel. Das sind 4-mal so viele wie A.
	A bekommt monatlich 5 DM Taschengeld. B bekommt 3-mal so viel.	A bekommt monatlich 5 DM, B bekommt 15 DM. Wievielmal so viel bekommt B?	B bekommt 15 DM. Das ist 4-mal so viel wie A bekommt. Wie viel bekommt A?
1.5 Multiplikative Veränderung einer Grösse	Ein Elastikband kann auf das Dreifache seiner Länge gedehnt werden. Auf welche Länge kann ein 4 m-Band gedehnt werden?	Ein Elastikband der Länge 4 m kann auf 12 m gedehnt werden. Auf das Wievielfache seiner Originallänge kann es gedehnt werden?	Ein Elastikband kann auf das Vierfache seiner Länge gedehnt werden. Welche Originallänge hat ein auf 12 m gedehntes Band?
2. Produkt von Grössen 2.1 Anzahl x Anzahl Kombinatorisches Modell	3 Röcke, 4 Blusen. Wie viele verschiedene Möglichkeiten?	Division wäre möglich, ist aber nicht üblich.	
Ausmessen mit Einheits-Fläche	Ein Zimmer ist 3 m lang und 4 m breit. Wie viele Meterquadrate braucht man zum Auslegen?		
2.2 Länge x Länge	Ein Teppich ist 3 m lang und 4 m breit. Wie gross ist sein Flächeninhalt?	Ein Teppich hat 20 m² Flächeninhalt. Er ist 4 m breit. Wie lang ist er?	
2.3 Produkt sonstiger Grössen	Ein elektrisches Heizgerät mit 3 kW Leistung brennt 4 h. Wie viele kWh verbraucht es?	Ein Heizgerät mit 4 kW Leistung verbrauchte 12 kWh. Wie lange war es eingeschaltet?	In 4 h verbrauchte ein Heizgerät 12 kWh. Wie groß ist die Heizleistung?

Tab. 4: Sachsituationen zur Multiplikation/Division (nach Tabelle 9.1, Gerster & Schultz, 2004, S. 389)