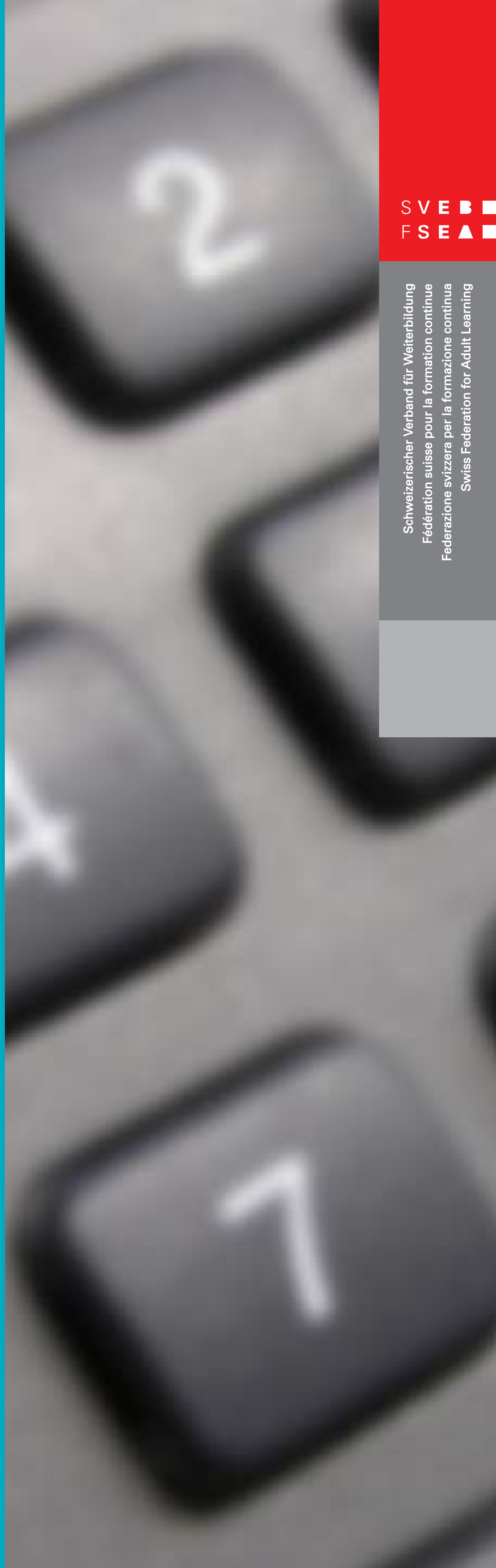
Hansruedi Kaiser

Bausteine für ein Konzept zur Förderung alltagsmathematischer Kompetenz

Teil 1
Alltagsmathematik – eine Einführung
Aktuelle Kursbeispiele

Teil 2
Didaktisches Begleitmaterial



Schweizerischer Verband für Weiterbildung
Oerlikonerstrasse 38
8057 Zürich

Im Auftrag des
Staatsekretariats für Wirtschaft SECO

Schweizerische Eidgenossenschaft
Confédération suisse
Confederazione Svizzera
Confederaziun svizra

Eidgenössisches Volkswirtschaftsdepartement EVD
Staatssekretariat für Wirtschaft SECO

4.4 Verstehen von Konzepten fördern

4.4.1 Ein wenig Mathematikdidaktik

Ein zentrales Problem bei mathematischen Aufgaben ist, dass sich die Lernenden gleichzeitig und koordiniert in drei Welten bewegen müssen:

- **Dinge**: Sofern es nicht um reine Rechnungsübungen geht, steht im Zentrum immer eine reale Aufgabe, die gelöst werden muss. Dabei geht es um reale „Dinge“. Man sollte wissen, wie viele Karotten einzukaufen sind, damit nach der Verarbeitung genügend zu Essen auf den Tisch kommt. Oder man möchte wissen, wie breit man einzelne Bretter zuschneiden muss, damit sie verleimt eine Platte für den Esstisch ergeben etc. Für die Lösung der realen Aufgabe spielt meist Vieles eine Rolle, welches nichts mit Mathematik und Rechnen zu tun hat. So können etwa Bretter aus physikalischen Gründen weder beliebig dünn noch beliebig lange sein. Gerade diese aussermathematischen Aspekte können aber oft helfen, Lösungen auf ihre Plausibilität zu überprüfen.
- **Konzepte**: Die reale Aufgabe muss in ein mathematisches Modell übersetzt werden. An die Stelle bestimmter für die Problemlösung wichtiger Eigenschaften der „Dinge“ treten Zahlen als abstrakte Grössen. Zahlen sind wie Legobausteine. Wenn man sie geschickt kombiniert, lassen sich damit reale Problemsituationen mehr oder weniger getreu abbilden. Die Zahlen haben gewisse fixe Eigenschaften. Kennt man diese, so kann man das Modell derart umformen, dass die Lösung leicht zu erkennen ist.

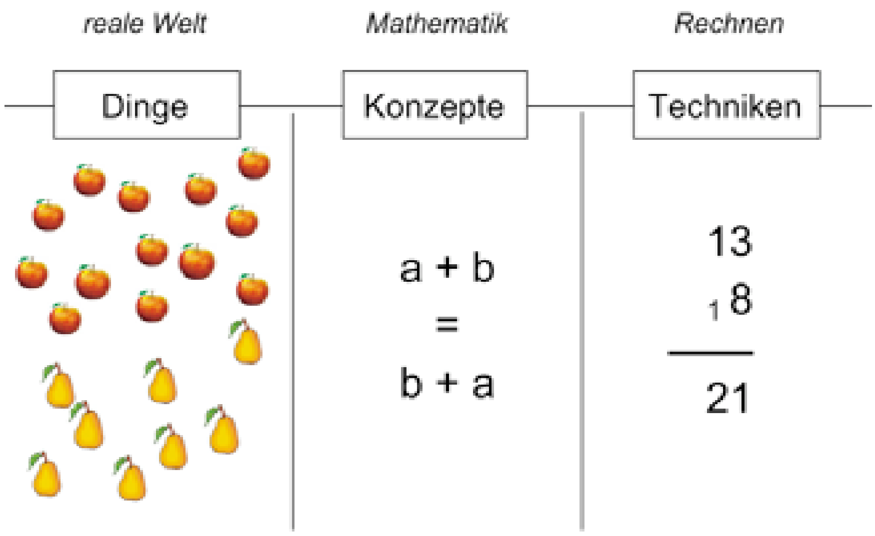


Abb. 3: Die drei Welten alltagsmathematischer Aufgaben

- **Techniken**: Als Lösungen für konkrete Probleme sind aber meist konkrete Grössen gefragt. Um diese zu errechnen, müssen die Zahlen im mathematischen Modell durch konkrete Grössen ersetzt werden. Diese werden in einer bestimmten Notation geschrieben. Je nach Notation und gewähltem mathematischen Modell lassen sich dann bestimmte Rechentechniken einsetzen, um die Grösse zu erhalten, welche der Lösung entspricht. Diese Rechentechniken sind Prozeduren, die ihre eigenen, vom gewählten mathematischen Modell unabhängigen Schwierigkeiten und Stolpersteine bergen (z.B. Zehnerübergänge).

Lernende stehen also vor vielfältigen Herausforderungen. Sie müssen mindestens:

- jede dieser drei Welten ausreichend beherrschen (Problemlösen, Mathematisieren, Rechnen).
- die drei Welten im Rahmen einer Problemlösung koordinieren.

Dies ist oft nicht ganz einfach, und viele Lernende (und auch Lehrende!) behelfen sich damit, dass sie sich nur auf die dritte dieser Welten fokussieren und nur zu lernen/lehren versuchen, wie man beim „Rechnen“ Schritt für Schritt vorgehen muss. Dies ist aber keine Lösung, denn so sind die Lernenden nicht in der Lage, ihr eigenes Vorgehen zu kontrollieren und Fehler zu bemerken. Oft können sie sich so auch nur schlecht die einzelnen Schritte des Rechenverfahrens merken, wissen nicht mehr, ob an einer bestimmten Stelle z.B. multipliziert oder dividiert werden muss.

4.4.2 Handfestes Modellieren, ein erstes Beispiel

Hilfe bringt eine intensive Auseinandersetzung mit den Beziehungen zwischen den drei Welten. Spielmaterial wie Knete, Knöpfe, Stäbchen etc. eignet sich ideal dafür.

Ein Beispiel aus der Backstube:

Aufgabe

> „Die gewünschte Teigtemperatur beträgt 24° C. Die Kneterwärmung 5° C. Der Vorteig war über Nacht im Kühlraum und hat eine Temperatur von 8° C. Die Backstube weist eine Temperatur von 25°C auf und das Mehl aus dem Silo hat 15° C. Wie warm muss [das Wasser] geschüttet werden?“

Vorgehen

> Im Unterricht wird üblicherweise folgendes Berechnungsverfahren gelehrt: „Ihr müsst zuerst von der gewünschten Teigtemperatur die Kneterwärmung abziehen. Dann multipliziert ihr den erhaltenen Wert mit der Anzahl Zutaten (inklusive Lufttemperatur) und zieht dann alle bekannten Temperaturen der Zutaten ab“.

Schwierigkeiten

> Lernende bekunden mit diesem Verfahren immer wieder Probleme. Unter anderem können sie sich einfach nicht merken, ob am Schluss nun dazugezählt oder abgezählt werden muss.

1. Die Welt der Dinge darstellen

In einem ersten Schritt geht es darum, einmal die Welt der Dinge noch ganz unabhängig von „Mathematik“ oder „Rechnen“ darzustellen. Die Lernenden sollen sich handfest ein Bild davon machen, um welche Dinge es in der Aufgabe geht und wie diese zu einander in Beziehung stehen.

Im Beispiel geht es um die Herstellung eines Teiges. Zutaten werden zusammengeschüttet und dann verknetet.

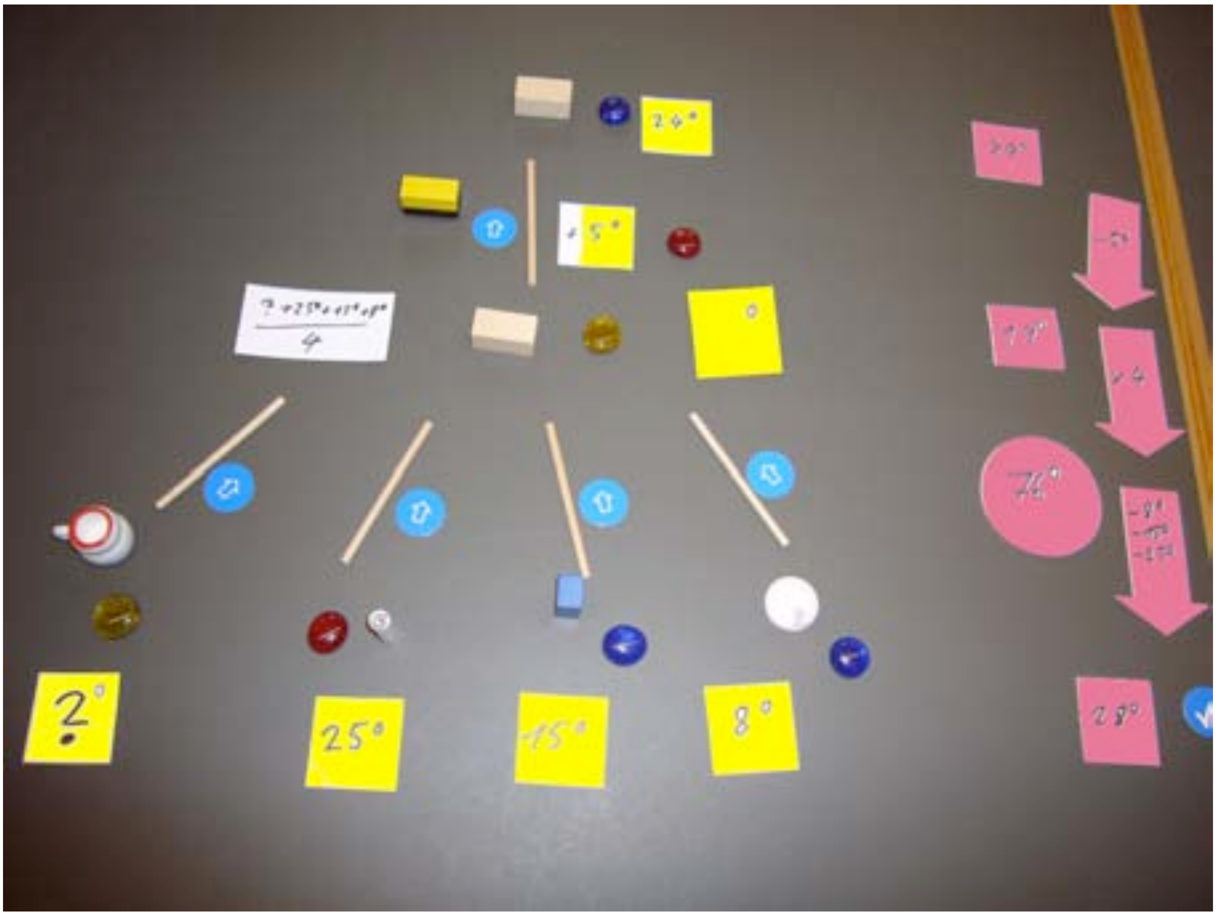


Abb. 4: Rechnen mit Temperaturen bei der Teigherstellung

In *Abb. 4* ist diese Welt mit den Stäbchen, Knöpfen, Gegenständen repräsentiert[19]. Entsprechend den zwei Schritten des Herstellungsvorgangs kann man sich auch die Entstehung der Endtemperatur als zweischrittigen Prozess vorstellen. Beim ersten Schritt entsteht aus den Temperaturen der verschiedenen Zutaten (Wasser, Mehl, Vorteig und Raumtemperatur!) eine „Mischtemperatur“. Als zweiter Schritt findet dann beim Kneten des Teiges noch eine Erwärmung statt, welche durch die Reibung verursacht wird.

2. Die mathematischen Beziehungen darstellen

Damit später gerechnet werden kann, muss die Welt der Dinge in ein mathematisches Modell gefasst werden. Dazu muss geklärt werden, welche Aspekte der Dinge durch Zahlen erfasst werden sollen und wie diese Zahlen zueinander in Beziehung stehen. Der Aufbau

---

19 Beim Material handelt es sich um Compad® Lernmaterial (http://compad.webterminal.ch/). Jede andere reichhaltige Sammlung von Knöpfen, Stäbchen, Spielfiguren, Knete etc. erfüllt diesen Zweck auch.

des mathematischen Modells ist in vielen Fällen der anspruchsvollste Schritt. Damit eine hilfreiche Darstellung gelingt, sind die Lernenden dabei meist auf Unterstützung angewiesen.

In Abbildung 1 stehen die gelben quadratischen Kärtchen für Zahlen. Den „Zutaten“ wie auch dem Endprodukt ist eine Temperatur zugeordnet. Die aus der Aufgabenstellung bekannten Temperaturen sind auf den Kärtchen eingetragen.

Die weissen Zettel stehen für die Zusammenhänge zwischen diesen Zahlen. Jedem der beiden Schritte ist ein mathematisches Modell zugeordnet. Das Modell für die Wirkung der Kneterwärmung im zweiten Schritt ist einfach: Eine Addition, bei der die Teigtemperatur durch die Erwärmung entsprechend erhöht wird. Das Modell für die Temperaturmischung im ersten Schritt ist hingegen etwas komplexer. Hier wird als Modell das arithmetische Mittel eingesetzt, bei dem alle beteiligten Temperaturen mit gleichem Gewicht miteinander verrechnet werden.

An dieser Stelle wird klar, dass die Darstellung der Welt der Dinge durch die verwendeten mathematischen Konzepte beeinflusst wird. Die Temperatur der Backstube wirkt in Wirklichkeit nicht nur beim Zusammenschütten der „Zutaten“, sondern auch - oder sogar vor allem - während des Knetens. Dieser Sachverhalt ist aber mathematisch schwieriger zu modellieren. Die Temperatureinflüsse werden daher im unserem Modell vereinfacht dargestellt und offenbar hat sich diese Vereinfachung in der Praxis bewährt.

Die mathematische Modellierung stellt auch an einem zweiten Punkt nur eine Annäherung an die Verhältnisse in der Welt der Dinge dar. Bei der Durchschnittsberechnung werden alle Temperaturen der Zutaten gleich gewichtet. Dies ist nicht ganz exakt, denn der eher kleine Vorteig beeinflusst die Endtemperatur sicher weniger stark als das Mehl und das Wasser. Aber offenbar hat sich auch in dieser Hinsicht die Vereinfachung, welche sich durch das gewählte Modell ergibt, praktisch bewährt.

Die Eigenschaften der einzelnen Dinge erlauben, abzuschätzen, wie das Resultat ausfallen wird. Gewisse Temperaturen sind deutlich tiefer als der Zielwert (15° und 8°; blaue Knöpfe), zwei andere sind nur wenig über dem Zielwert (25° und +5°; rote Knöpfe), so dass die notwendige Temperatur für das Wasser wohl über 24° liegen dürfte.

3. Die „Rechnung“ eintragen und durchführen

Ganz rechts in Abbildung 4 ist dann die „Welt der Techniken“, des Rechnens, eingefügt. Dort wird sichtbar, wie aus dem mathematischen Modell ein Rechnungsvorgang abgeleitet werden kann. Ist die Endtemperatur vorgegeben, so muss selbstverständlich von dieser ausgehend rückwärts gerechnet werden. Aus der Addition bei der Kneterwärmung wird eine Subtraktion, und die Auflösung des Durchschnitts führt zu einer Multiplikation mit der Anzahl Zutaten mit anschliessenden weiteren Subtraktionen.

Betrachtet man nur den Rechenvorgang, sind sowohl die Subtraktion wie auch die Multiplikation intuitiv nicht einfach nachvollziehbar. Die Subtraktion verlangt, dass „Dinge“, die beim Herstellungsprozess hinzukommen, weggenommen werden müssen. Und die Multiplikation scheint nahezulegen, dass das Resultat von der Anzahl Zutaten abhängt (!?) und dass die Temperatur umso höher ist, je mehr Zutaten verwendet werden (!?).

Bei der Subtraktion hilft vielleicht die Überlegung, dass vom Endresultat her rückwärts gerechnet wird und dass die Addition, das Hinzufügen, daher rückgängig gemacht werden muss. Eine solch einfache Überlegung bietet sich aber bei der Multiplikation der Anzahl Zutaten nicht an. Dies illustriert, dass verlässliches Rechnen nur möglich ist, wenn es den Lernenden gelingt, die drei Welten zu vernetzen. Wird nur das Rechenverfahren eingeführt, dann besteht die Gefahr, dass manche Lernende plötzlich addieren anstatt zu subtrahieren. Und den Allermeisten wird die Multiplikation mit der Anzahl „Zutaten" völlig unverständlich bleiben. Sie werden sie einfach als einen Akt „mathematischer Magie" erleben.

4.4.3 Noch ein Beispiel: „Rahmtäfeli machen"

- Es sollen 3500 g Rahmtäfeli produziert werden.
- Der Schneidverlust beträgt 4.2%.
- Der Kochverlust beträgt 14.6%.
- Der Zucker macht 42% der Teigmasse aus.
- Wie viel Zucker wird benötigt?

Die Abbildungen 5 bis 7 zeigen Schritt für Schritt, wie sich die Aufgabe modellieren lässt.

1. Die Welt der Dinge darstellen

Die Herstellung kann in drei Schritte zerlegt werden (von links nach rechts in *Abb* 5). 1) Mischen der Zutaten, 2) Kochen der Masse und 3) Zerschneiden der verfestigten Masse. Beim ersten Schritt wird Zucker mit den restlichen Zutaten vermengt. Bei den letzten beiden Schritten geht jeweils etwas Masse verloren.

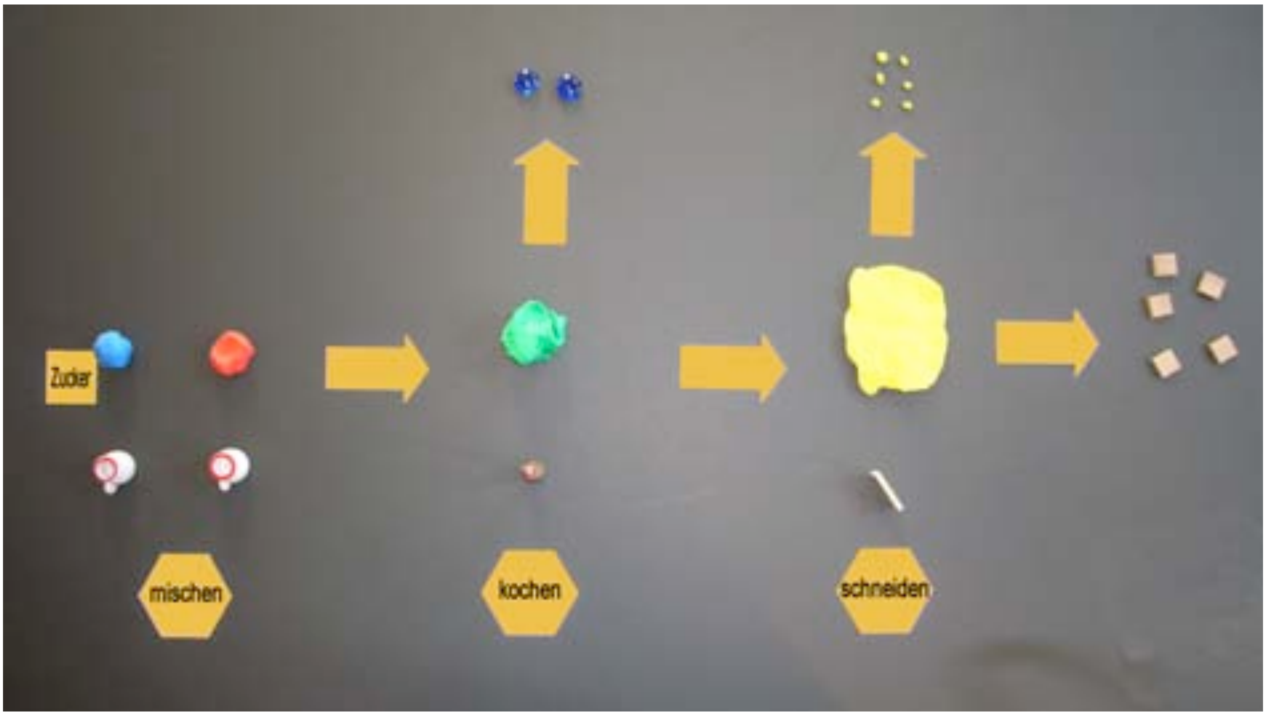


Abb. 5: Rahmtäfeli, die Welt der Dinge

2. Die mathematischen Beziehungen darstellen

Bei jedem der drei Schritte geht es mathematisch darum, dass von einem „Ganzen" ein Teil abgetrennt wird. In Abbildung 6 sind die „Ganzen" – d.h. die Grundmengen, welche 100% entsprechen – jeweils in einen Rahmen eingeschlossen. In diesen Rahmen ist auch dargestellt, wie viel die bekannten Teilmengen in Prozenten ausmachen. Mit dieser Erweiterung sind die Welt der Dinge und die Welt der mathematischen Konzepte vereint dargestellt.

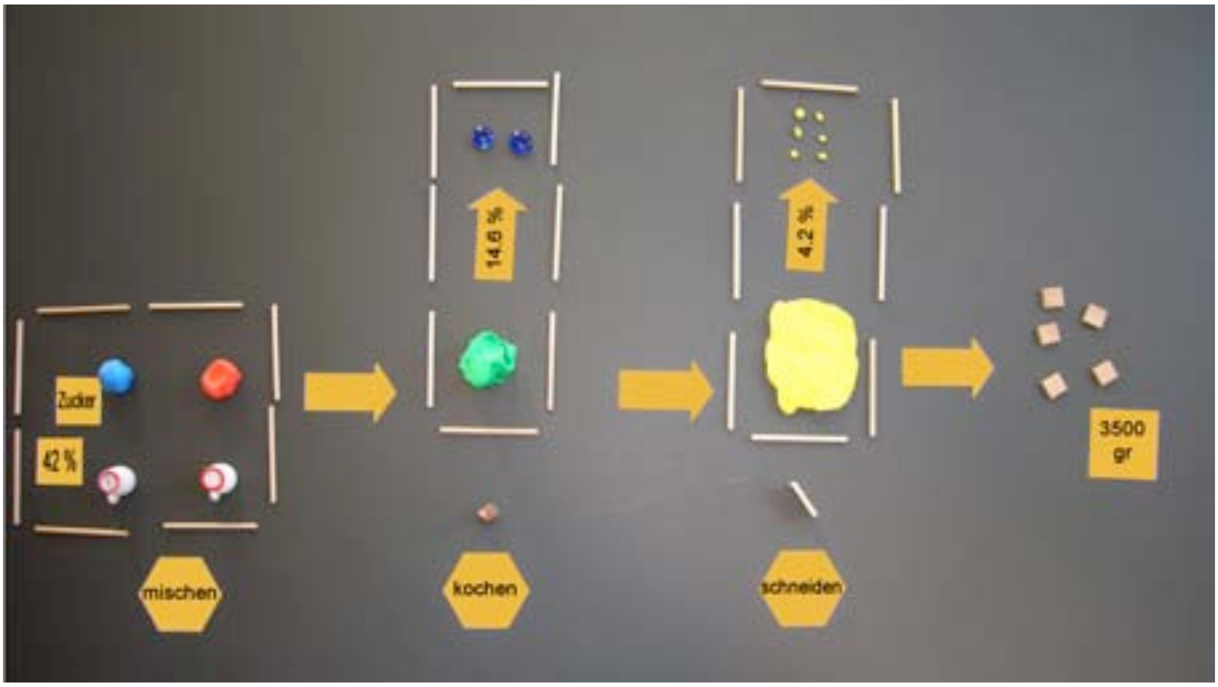


Abb. 6: Rahmtäfeli, Dinge und mathematische Konzepte vereint

3. Die „Rechnung" eintragen und durchführen

Innerhalb des Modells lässt sich anschliessend Schritt für Schritt von rechts nach links die gesuchte Menge Zucker ermitteln. Bei den ersten beiden Schritten ist jeweils ein Teil bekannt (das Komplement zum Verlust) und es muss das Ganze berechnet werden. Beim dritten Schritt verhält es sich umgekehrt, d.h. ausgehend vom Ganzen wird auf ein Teil geschlossen.

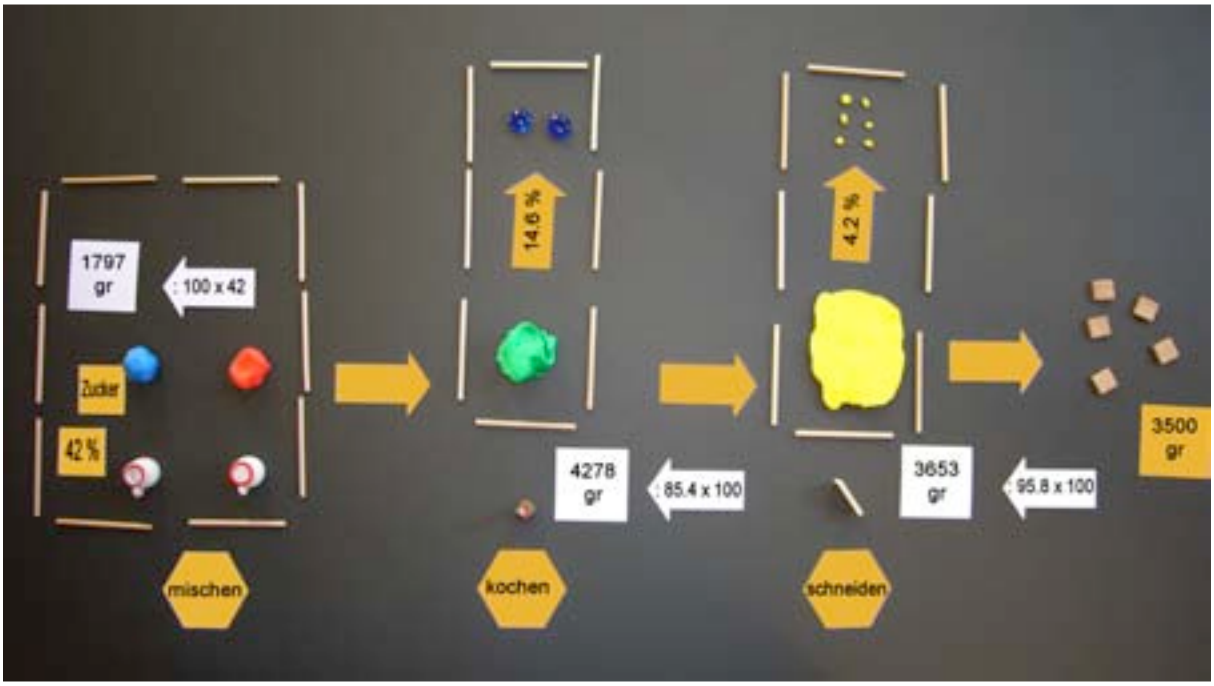


Abb. 7: Rahmtäfeli, Rechnung ausgeführt

4.4.4 Hinweise zu den einzelnen Schritten

1. Die drei Schritte in Kurzform

1. **Die Welt der Dinge darstellen:** Als Erstes geht es darum, dass sich die Lernenden ganz handfest ein Bild davon machen, um welche Dinge es in der Aufgabe geht und wie diese zueinander in Beziehung stehen. Mit Spielsteinen, Knetmaterial, Symbolen und beschrifteten Kärtchen wird ein entsprechendes Modell erstellt.
2. **Die mathematischen Beziehungen darstellen:** Damit mit den Daten gerechnet werden kann, muss die Welt der Dinge in ein mathematisches Modell gefasst werden. Dazu werden Kärtchen für einzelne Zahlen, welche im Laufe der Problemlösung eine Rolle spielen, an der entsprechenden Stelle platziert. Die Beziehungen zwischen diesen Zahlen werden verdeutlicht. Bekannte Daten und Messgrössen werden auf den entsprechenden Kärtchen eingetragen.
3. **Die „Rechnung" eintragen und durchführen:** Als letzter Schritt wird neben die bisherige Darstellung die „Rechnung" mit allen Zwischenresultaten und dem Endresultat gelegt.

2. Die Welt der Dinge darstellen

Beim ersten Schritt gilt als zentrale Regel, dass Zahlen, „Mathematik", Rechnen etc. hier vorerst noch nichts zu suchen haben. Es geht nur darum, die verschiedenen in der Aufgabe erwähnten Dinge und ihre Beziehungen zueinander darzustellen. Dies ist unter anderem deshalb entscheidend, weil gerade Lernende mit Schwierigkeiten die Tendenz haben, sich sofort auf die Rechnung zu stürzen und mit Werten zu jonglieren, ohne sich überhaupt je ein Bild von der Situation zu machen, die es zu bearbeiten gilt.

Die Darstellung, die im ersten Schritt entsteht, wird sich in den seltensten Fällen dazu eignen, die mathematischen Beziehungen so klar und nahtlos einzufügen, wie dies in den beiden Beispielen oben möglich war. Oft wird sich beim Versuch, den zweiten Schritt durchzuführen, zeigen, dass das Modell etwas umgebaut werden muss. Dies ist normal und stellt einen wichtigen Schritt im Verstehensprozess der Lernenden dar. Die Modellierung mit Spielsteinen etc. erlaubt solche Umbauten ja auch ohne weiteres.

3. Das mathematische Modell bauen

Optimal ist, wenn es den Lernenden mit Hilfe der Lehrperson gelingt, eine Darstellung zu finden, bei welcher die zentralen Eigenschaften der verwendeten Konzepte deutlich werden. Die „100%-Rahmen" in Abbildung 6 dürften ein gutes Beispiel dafür sein. Sie machen sichtbar, dass beim Prozentrechnen immer geklärt werden muss, welches die Menge ist, die 100% entspricht – etwas, das Lernenden immer wieder Schwierigkeiten bereitet.

Weniger aussagekräftig ist hingegen das schlichte Kärtchen für den Mittelwert in Abbildung 4. Allerdings hängt die optimale Darstellung stark sowohl vom Vorwissen der Lernenden wie auch von ihren spezifischen Unsicherheiten ab. Je nach Gruppe kann ein solches Kärtchen als Bild für den Mittelwert durchaus genügen.

Wie bereits erwähnt, muss bei diesem zweiten Schritt oft das Modell aus dem ersten Schritt etwas umgebaut werden:

- Das kann im einfachsten Fall bedeuten, dass etwas Platz geschaffen werden muss, um die mathematischen Beziehungen darstellen zu können – z.B. für den „100%-Rahmen“ in Abbildung 6.
- Manchmal zeigt sich aber, dass gewisse Dinge bei der Darstellung vergessen wurden, welche für die Berechnung benötigt werden – das könnte z.B. mit der Temperatur der Backstube in Abbildung 4 geschehen.
- Und manchmal wird es notwendig, die Zusammenhänge anders darzustellen, da die zu verwendende „Mathematik“ die Welt der Dinge anders modelliert, als es im ersten Zugang sinnvoll erschien. Auch dazu bietet die Temperatur der Backstube ein mögliches Beispiel. Vielleicht wurde sie in Abbildung 4 zuerst als Einflussgrösse parallel zur Kneterwärmung dargestellt und musste dann aufgrund des mathematischen Modells zu den Zutaten verschoben werden.

Die Modellierung mit Spielsteinen etc. erlaubt solche Umbauten ohne weiteres. Die notwendigen Umbauten können als Anlass dazu genommen werden, darüber zu diskutieren, dass sich die Welt der Dinge meist auf ganz verschiedene Arten modellieren lässt. Manchmal bevorzugt die gewählte „Mathematik“ gewisse Varianten und manchmal werden der Berechenbarkeit zuliebe die Verhältnisse ein wenig „zurechtgebogen“ (wie bei der Art, wie die Temperatur der Backstube einbezogen wird, oder bei der Gewichtung der „Zutaten“ in Abbildung 4).

4. Die „Rechnung“ eintragen und durchführen

Wie die beiden verwendeten Beispiele zeigen, kommt es immer wieder vor, dass der Berechnungsablauf anders verläuft als der Handlungsablauf in der Welt der Dinge – z.B. genau in umgekehrter Richtung. Optimal ist, wenn dies in der Darstellung deutlich wird. Dadurch werden viele intuitiv nicht plausible Rechenschritte einfacher nachvollziehbar.

4.4.5 Arbeitsanleitung „Fachrechnen“

<table>
<tr><td>1
Die Welt der Dinge</td><td>Mit dem vorhandenen Material darstellen, von welchen Dingen in der Aufgabe die Rede ist.
Zahlen und Berechnungen spielen bei diesem ersten Schritt noch keine Rolle.
• Welche Dinge kommen in der Aufgabe vor?
• Wie stehen sie zueinander in Beziehung?
• Werden sie durch einzelne Arbeitschritte verändert?
- Ausgangsmaterial und Endprodukt des Arbeitsschritts darstellen;
- Wichtige Veränderungen deutlich sichtbar machen.</td></tr>
<tr><td>2
Die mathematischen Beziehungen</td><td>Die Messgrössen und Zusammenhänge zwischen ihnen eintragen.
• Welche Messgrössen spielen in der Aufgabe eine Rolle?
- Für jede Grösse an der entsprechenden Stelle ein Kärtchen hinlegen;
- Masseinheiten eintragen;
- Werte für bekannte Grössen eintragen;
- Gesuchte Grössen kennzeichnen;
- Kärtchen für nützliche Zwischenresultate einfügen.
• In welcher mathematischen Beziehung stehen die einzelnen Grössen zueinander?
- Operationen eintragen (+, -, ÷, x etc.);
- Kennzeichen, wenn zwei Grössen gleich sind oder dieselbe Grösse an mehreren Stellen auftritt.</td></tr>
<tr><td>3
Die Rechnung</td><td>Die Berechnung mit allen Zwischenresultaten und dem Endresultat Schritt für Schritt eintragen.
• Wo beginnt die Berechnung?
• Über welche Schritte läuft die Berechnung ab?
• Was muss bei jedem einzelnen Schritt gerechnet werden?
• Welche Zwischenresultate ergeben sich?
• Welches Endresultat erhält man?</td></tr>
</table>