Hansruedi Kaiser

SVEB
FSEA

Schweizerischer Verband für Weiterbildung
Fédération suisse pour la formation continue
Federazione svizzera per la formazione continua
Swiss Federation for Adult Learning

Eléments constitutifs d'un concept pour la promotion des compétences en numératie

1ère partie
Numératie – Introduction
Exemples de cours

2ème partie
Matériel d'accompagnement didactique

Fédération suisse pour la formation continue
Schweizerischer Verband für Weiterbildung
Oerlikonerstrasse 38
8057 Zürich

Une étude commendée par le Secrétariat d'Etat à l'économie SECO

Schweizerische Eidgenossenschaft
Confédération suisse
Confederazione Svizzera
Confederaziun svizra

Département fédéral de l'économie DFE
Secrétariat d'Etat à l'économie SECO

4.4 Promouvoir la compréhension de concepts

4.4.1 Un peu de didactique en mathématiques

Généralement, lorsque des apprenants résolvent des tâches mathématiques, le déplacement simultané et coordonné dans trois univers différents pose un problème majeur :

- **Des objets :** pour autant qu'il ne s'agisse pas purement d'exercices de mathématiques, ce sont toujours des tâches réelles qui sont au centre de l'attention. L'on cherche à savoir combien de carottes il faut acheter afin d'avoir assez de nourriture sur la table après la cuisson. Ou calculer à quelle largeur des planches doivent être découpées pour faire une table à manger en les collant etc.
  La résolution de ces tâches réelles nécessite souvent une prise en compte d'aspects qui ne sont pas d'ordre mathématique. D'un point de vue physique par exemple, des planches ne peuvent pas être découpées à n'importe quelle longueur ou largeur. Ce sont justement ces facteurs qui ne sont pas de nature mathématique qui servent à vérifier la crédibilité des résultats.
- **Des concepts :** la tâche réelle doit être traduite en un modèle mathématique. Au lieu de caractéristiques définies des objets, fondamentales pour la solution du problème, apparaissent des chiffres symbolisant des éléments abstraits. Les chiffres sont comme des briques de lego. En les combinant habilement, on peut plus ou moins bien reproduire les données d'un problème. Les chiffres ont certaines caractéristiques constantes. A condition de les connaître, on peut façonner le modèle au point de reconnaître la solution aisément.

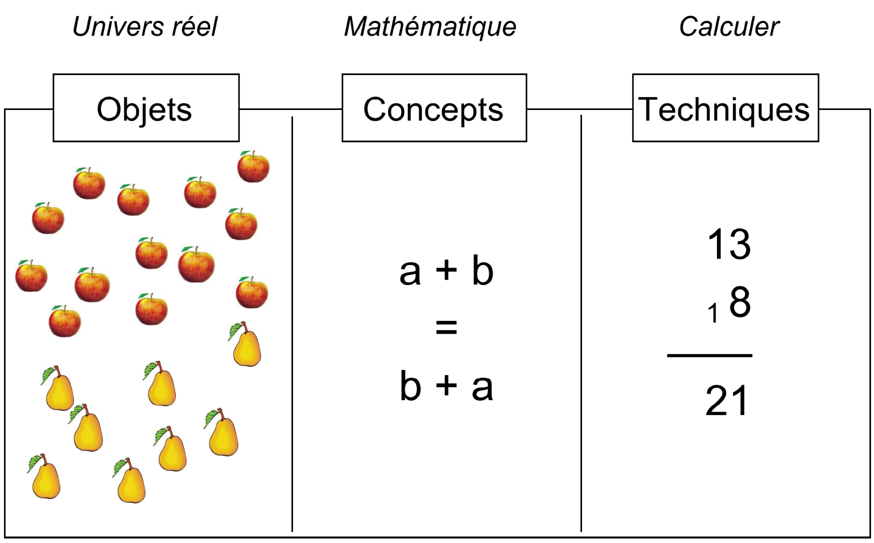

Figure 6 : Les trois univers de problèmes mathématiques

- **Techniques** : un problème concret réclame souvent des chiffres concrets comme résultat. Pour les obtenir, il faut remplacer les nombres du modèle mathématique par des chiffres concrets. Ceux-ci s'écrivent en notation spécifique. Selon la notation et le modèle mathématique sélectionné, des techniques de calcul définies peuvent être appliquées afin d'obtenir le résultat correct. Ces techniques de calcul sont des procédures qui comportent leurs propres difficultés et entraves (p.ex. passages à la dizaine) indépendamment du modèle mathématique sélectionné.

Les apprenants se retrouvent donc face à de nombreux défis. Les points suivants sont des éléments indispensables afin de pouvoir calculer :

- maîtriser suffisamment chacun de ces univers (résoudre des problèmes, mathématiser, calculer).
- coordonner ces trois univers dans le cadre de la résolution d'un problème.

Ceci n'est pas toujours très simple et beaucoup d'apprenants (également des instructeurs !) s'aident en se concentrant uniquement sur un des trois mondes, et en apprenant/enseignant uniquement des méthodes de calcul au pas à pas.

Mais de cette façon, les apprenants ne sont pas en mesure de contrôler leur propre procédé et de remarquer des erreurs ; cette méthode ne représente donc pas une solution. Il est aussi difficile de retenir chaque pas de cette méthode de calcul, de plus, il arrive qu'à certains endroits on ne se souvienne plus si par exemple, il faut multiplier ou diviser.

4.4.2 Modeler solidement, un premier exemple

Etudier intensément les relations qui règnent entre les trois univers est très utile. Du matériel ludique tel que de la pâte à modeler, des boutons, des baguettes etc. s'y prête parfaitement.

Voici un exemple traitant le cas d'un atelier de boulangerie :

Exercice

« La température de la pâte souhaitée est de 24°C. Le réchauffement dû au modelage de la pâte 5°C. Le levain qui se trouvait dans l'enceinte frigorifique comporte 8°C. Dans l'atelier de boulangerie il fait 25°C et la farine du silo a une température de 15°C. A combien de degrés l'eau doit-elle être versée ?

Procédure

En cours, on enseigne généralement la méthode de calcul suivante : « D'abord la température provoquée par le modelage doit être soustraite de la température souhaitée. Ce chiffre doit être multiplié par le nombre d'ingrédients (température de l'air incluse) et puis il faut soustraire tous les degrés des ingrédients connus. »

Difficultés

Ce procédé pose sans cesse des problèmes aux apprenants. Ils ne parviennent pas, entre autres, à retenir si à la fin il faut encore additionner ou soustraire.

1. Représenter l'univers des objets

Dans un premier temps, il s'agit de représenter l'univers des objets tout à fait indépendamment des « mathématiques » ou des « calculs ». Les apprenants doivent se faire une image cohérente des objets dont il s'agit dans l'exercice, ainsi que des rapports qui règnent entre eux.

Dans l’exercice il s’agit de la fabrication de pâte. Les ingrédients sont mélangés et pétris. Dans la figure 7 cet univers est représenté par des baguettes, des boutons et des objets.[20] Conformément aux deux étapes de la procédure de fabrication, la formation de la température finale peut également être imaginée comme un processus à deux étapes. Lors de la première étape se forme, à partir de la température des différents ingrédients (eau, farine, levain et température ambiante !), une « température mixte ». Lors de la deuxième étape, le frottement causé par la malaxation fait à nouveau grimper la température.

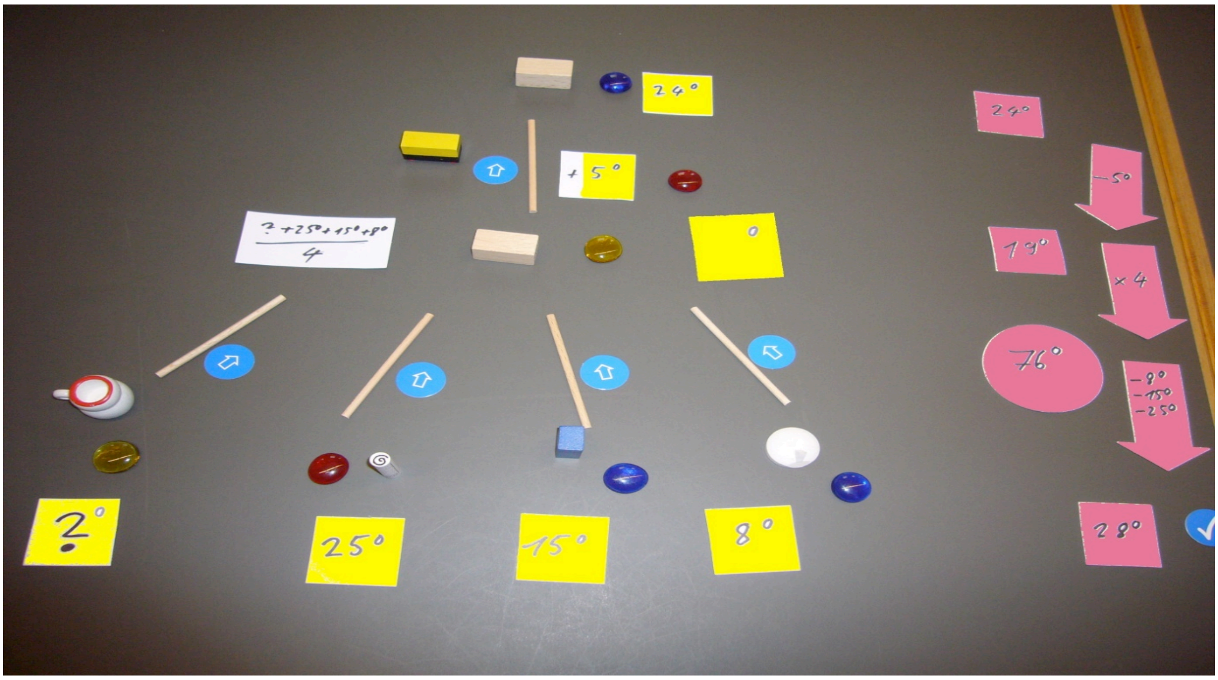

Figure 7 : Calculer au moyen de températures lors de la fabrication de pâte

2. Représenter les rapports mathématiques

Afin de pouvoir calculer par la suite, l’univers des objets doit être traduit en un modèle mathématique. Pour ce faire, il est nécessaire de clarifier quels aspects des objets doivent être répertoriés et quels rapport règne entre ces chiffres. Souvent la structuration du modèle mathématique est l’étape la plus exigeante. La plupart du temps, les apprenants ont besoin d’aide pour parvenir à une représentation leur étant utile.

Les cartons jaunes représentés dans la figure 7, symbolisent des chiffres. Une température est assignée aux « ingrédients », ainsi qu’au produit final. Les températures connues par les données du problème sont inscrites sur des cartons.

Les fiches blanches désignent les rapports entre les chiffres. A chacune des deux étapes est assigné un modèle mathématique. Le modèle illustrant l’effet de la malaxation dans la deuxième étape est simple : c’est une addition par laquelle la température de la pâte est augmentée en fonction du réchauffement. Par contre, le modèle illustrant le mélange des températures lors de la première étape est un peu plus complexe. Ici, le moyen arithmétique est utilisé en tant que modèle.

[20] Il s’agit du matériel suivant : Compad® Lernmaterial (http://compad.webterminal.ch/). N’importe qu’elle collection de boutons, baguettes, pions et pâte à modeler fait l’affaire.

Il devient clair que la représentation de l'univers des objets est influencée par les concepts mathématiques utilisés. La température de l'atelier de boulangerie agit non seulement lors du panachage de tous les « ingrédients », mais aussi – et particulièrement – lorsqu'on malaxe le tout, ce qui est difficilement représentable mathématiquement. Cependant dans notre modèle ces influences de la température sont illustrées de façon simplifiée et, visiblement, cette simplification a fait ses preuves dans la pratique.

La mise en place de modèles mathématiques représente qu'une approximation vers les rapports régissant l'univers des objets. Cela est aussi démontré lorsqu'en calculant la moyenne, les températures des ingrédients sont évalués identiquement. Ceci n'est pas très exact, car le levain influence moins fortement la température finale que la farine et l'eau. Mais manifestement là aussi cette simplification découlant du modèle choisi a fait ses preuves dans la pratique.

Les caractéristiques de chaque objet permettent d'estimer le résultat. Certaines températures sont passablement plus basses que l'objectif prévu (15° et 8° ; boutons bleus) deux autres sont légèrement au-dessus de l'objectif fixé (25° et +5° ; boutons rouges) de sorte que les températures nécessaires pour l'eau devrait se situer au-dessus de 24°.

3. Transcrire et effectuer le „calcul"

Tout à droite de la figure 7 est inséré « l'univers des techniques », l'univers des calculs. On y voit comment un processus de calcul peut être déduit d'un modèle mathématique. Si la température finale est indiquée, il faut évidemment la prendre comme point de départ et calculer à reculons. L'addition du réchauffement provoqué par la malaxation est transformée en soustraction, et la résolution de la moyenne mène à une multiplication par le nombre d'ingrédients ainsi qu'à des soustractions.

Si l'on considère uniquement le processus de calcul, la soustraction ainsi que la multiplication sont difficilement concevables mentalement. La soustraction exige que les « choses » qui s'ajoutent lors du processus de production doivent être ôtées. La multiplication suggère que le résultat dépend du nombre d'ingrédients (!?) et que les températures sont d'autant plus élevées que le nombre d'ingrédients augmente (!?).

Peut-être que la réflexion suivante aide à effectuer la soustraction : puisqu'à partir du résultat final il faut calculer à reculons, alors l'addition doit être annulée. Mais ce raisonnement ne se présente pas quand le nombre d'ingrédients est multiplié. Cela illustre que des calculs fiables sont possibles à condition que l'apprenant parvienne à interconnecter les trois univers.

Si l'on introduit uniquement la méthode de calcul, il existe le danger que certains apprenants se mettent tout à coup à additionner au lieu de soustraire. Pour la plupart des apprenants, la multiplication par le nombre « d'ingrédients » restera totalement incompréhensible. Ils la percevront tout simplement comme un « tour de magie mathématique ».

4.4.3 Encore un exemple : „faire des bonbons au caramel"

- Il faut fabriquer 3500 g de caramels.
- La perte due au tranchement comporte 4.2%.
- La perte due à la cuisson comporte 14.6%.

- Le sucre constitue 42% de la masse pâteuse.
- Combien de sucre est nécessaire ?

Les images 2 à 4 montrent pas à pas comment l'exercice peut être représenté par un modèle.

1. Représenter l'univers des objets

La fabrication peut être décomposée en trois étapes (de gauche à droite dans la figure 8). 1) mélanger les ingrédients, 2) cuire la masse et 3) couper la masse solidifiée en morceaux. Lors de la première étape, le sucre est mélangé avec les ingrédients restants. Lors des deux dernières étapes il y a toujours une perte de masse.

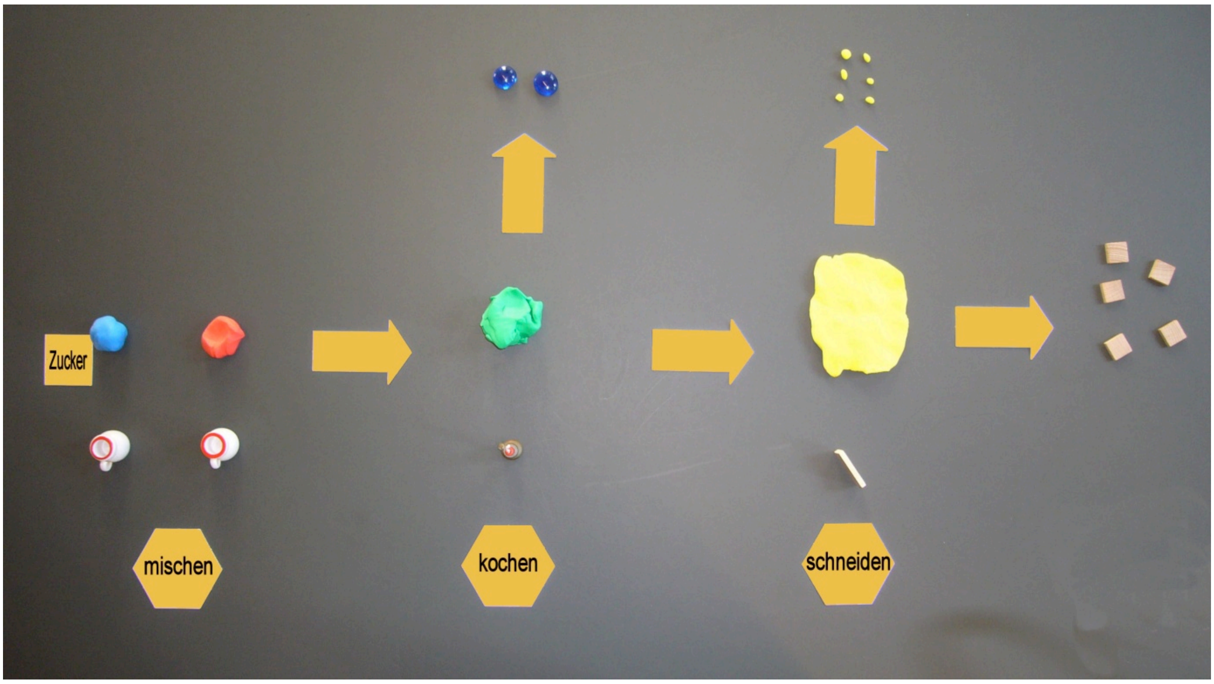

Figure 8 : Caramels, l'univers des objets

2. Représenter les rapports mathématiques

Lors de chacune des trois étapes, il s'agit, d'un point de vue mathématique, de détacher une partie de « l'ensemble ». Dans la figure 9, les « ensembles » - c'est-à-dire les ensembles de références correspondant à 100% - sont à chaque fois enfermés dans un cadre. Dans ce cadre la part de pourcentage de chaque partie de l'ensemble est représenté. Par cet élargissement, l'univers des objets et l'univers des concepts mathématiques sont représentés de façon uniforme.

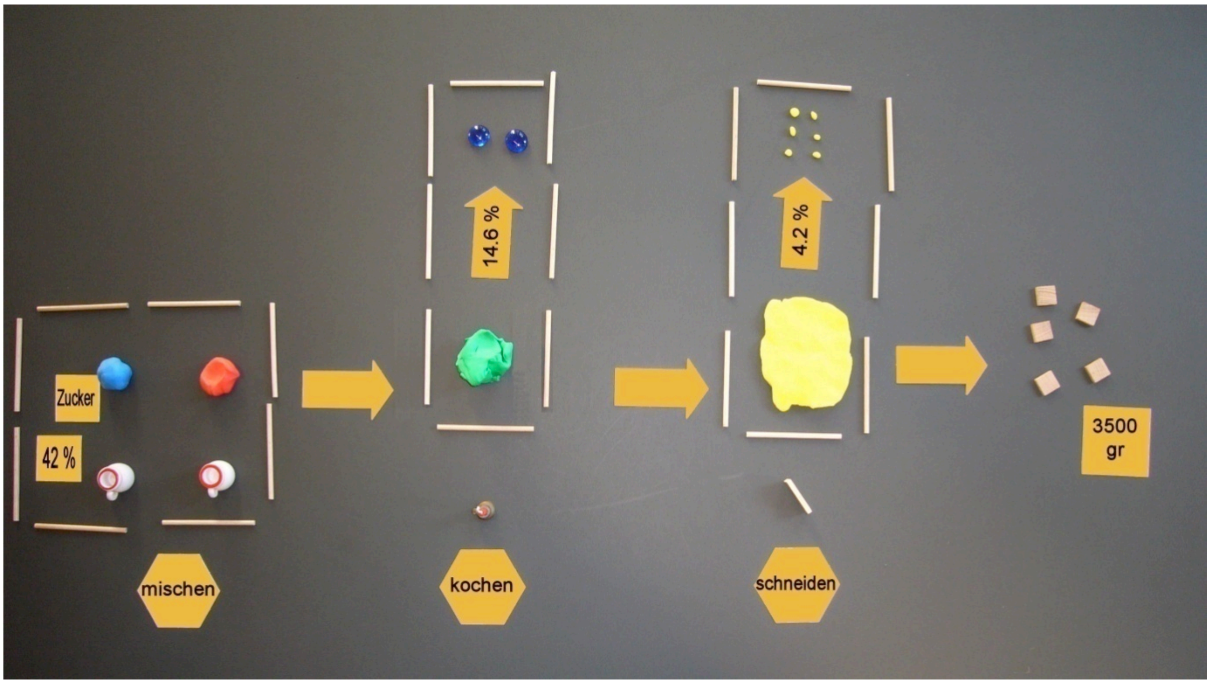

Figure 9 : Caramels, objets et concepts mathématiques réunis.

3. Introduire et effectuer le « calcul »

Par la suite, la quantité de sucre recherchée peut être déterminée à l'intérieur du modèle, pas à pas, de droite à gauche. Lors des deux premières étapes, il y a toujours une partie qui est connue (le complément de la perte) et le tout doit être calculé. Lors de la dernière étape c'est l'inverse, c'est-à-dire qu'en prenant l'ensemble comme point de départ, la partie recherchée peut être décelée.

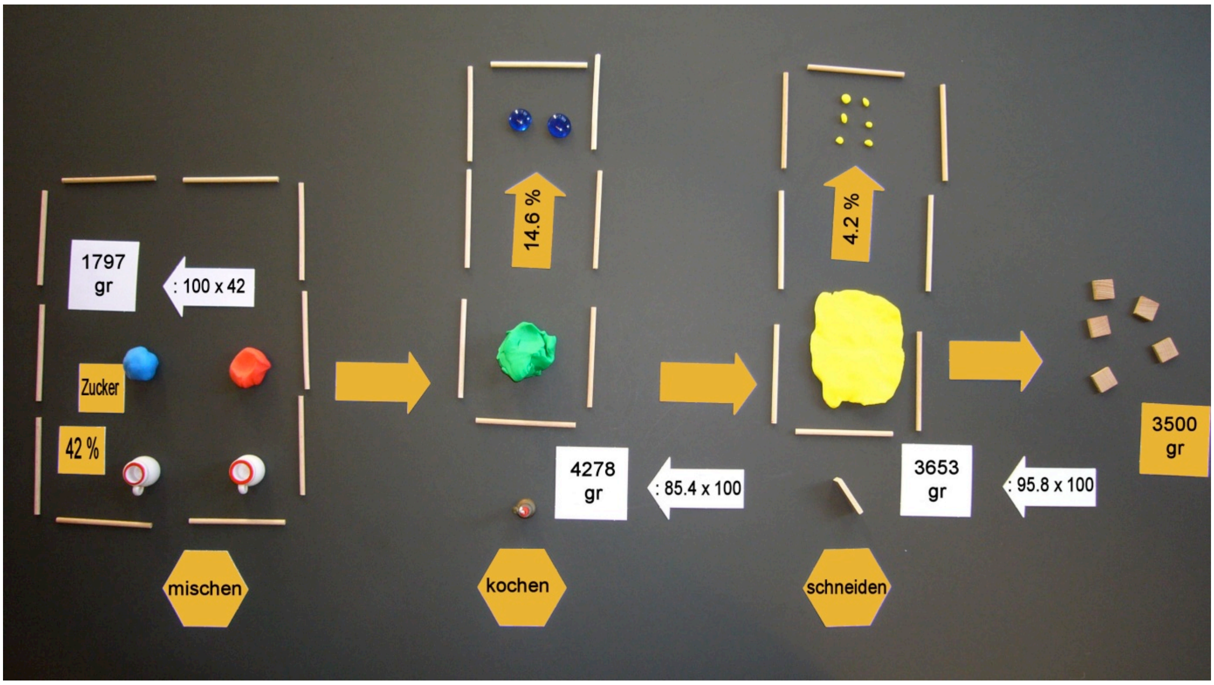

Figure 10 : caramels, calcul effectué.

4.4.4 Indications pour chaque pas

1. Les trois étapes en abrégé

1. **Représenter l'univers des objets :** Il s'agit d'abord de se faire une image cohérente des objets de l'exercice ; connaître le rapport qui règne entre eux. Des pions, de la pâte à modeler, des symboles et des fiches inscrites se prêtent bien à la création d'un tel modèle.
2. **Représenter les rapports mathématiques :** Afin de pouvoir calculer avec les données, l'univers des objets doit être saisi dans un modèle mathématique. Pour cela des feuillets présentant les chiffres qui interviennent dans la solution du problème sont placés à la place correspondante. Les rapports entre ces chiffres sont explicités. Des données et des mesures connues sont consignées sur les feuillets respectifs.
3. **Transcrire et effectuer le « calcul » :** Lors de la dernière étape, le « calcul » ainsi que tous les résultats intermédiaires et le résultat final sont placés à côté de la représentation.

2. Représenter l'univers des objets

Quand on procède à la première étape il est important de respecter une règle capitale selon laquelle les chiffres, « les mathématiques », les calculs etc., n'ont encore rien à faire ici. Il s'agit simplement de montrer les différents objets et leurs rapports mentionnés dans l'exercice.

Ceci est décisif dans le mesure où les apprenants ayant des difficultés ont la tendance de se jeter immédiatement sur le calcul et de jongler avec les valeurs, sans se représenter mentalement la situation en question.

La représentation qui résulte lors de la première étape va rarement se prêter à illustrer les rapports mathématiques aussi clairement que dans les deux exemples susmentionnés. Souvent c'est en procédant à la deuxième étape qu'il devient évident que le modèle doit être légèrement transformé. Ceci est tout à fait normal et essentiel dans le processus de compréhension. De plus, la création de modèles avec des pions permet de telles transformations.

3. Créer un modèle mathématique

L'idéal est lorsque l'apprenant parvient, avec le soutien d'un enseignant, à trouver une représentation précisant les caractéristiques principales des concepts utilisés. Les « cadres 100% » dans la figure 9 l'illustrent bien. Ils démontrent qu'en calculant les pourcentages, il faut toujours vérifier quelle quantité correspond à 100% ce qui cause souvent des difficultés aux apprenants.

Par contre, le feuillet symbolisant la valeur moyenne dans la figure 7 est moins pertinent. Toujours est-il que la représentation idéale dépend fortement des connaissances préalables des apprenants, ainsi que de leurs incertitudes spécifiques. Toutefois, il se peut que pour certains groupes, un tel feuillet suffise pour symboliser la valeur moyenne.

Comme dit précédemment, lorsqu'on procède à cette deuxième étape, le modèle de la première étape doit subir certaines transformations :

- Ceci peut simplement signifier qu'il doit être aménagé afin de pouvoir représenter les rapports mathématiques – par ex. pour les « cadres 100% » dans la figure 9.
- Parfois il s'avère que certains objets nécessaires au calcul ont été omis dans la représentation – par ex. la température de l'atelier de boulangerie dans la figure 7.
- Ensuite il est essentiel de modifier la représentation des rapports puisque les « mathématiques » présentent l'univers des objets différemment de ce qui paraissait judicieux initialement. Là aussi, le cas de la température de l'atelier de boulangerie est exemplaire. Peut-être que dans la figure 7 elle avait d'abord été représentée en tant que facteur influent, parallèle au réchauffement provoqué par la malaxation, et que finalement elle dû, en raison du modèle mathématique, être déplacée du côté des ingrédients.

La représentation par le biais de pions etc. permet sans autres de telles transformations. Celles-ci peuvent donner lieu à une discussion au sujet de l'univers des objets et leurs différents modèles. Parfois les « mathématiques » sélectionnées favorisent certaines variantes, et de temps à autres les rapports sont un peu « adaptés » (notamment en ce qui concerne la façon d'inclure la température de l'atelier de boulangerie ou comme lors de l'évaluation de l'influence des « ingrédients » dans la figure 7) en vue d'améliorer les conditions du calcul.

4. Transcrire et effectuer le „calcul“

Comme le démontrent les deux exemples, il arrive souvent que le processus de calcul diffère du déroulement de l'action dans l'univers des objets. Celle-ci par ex., peut évoluer à l'inverse. L'idéal, c'est lorsque ce phénomène est illustré dans la représentation. Ainsi, une bonne quantité d'étapes de calculs peuvent être clarifiées.

4.4.5 Directive de travail „mathématiques professionnelles“

<table>
<tr><td>1
L’univers des objets</td><td>Le matériel doit représenter les objets dont il est question dans l’exercice.
Dans cette étape, les chiffres et les opérations ne jouent aucun rôle.
• Quels objets sont évoqués dans l’exercice ?
• Quel est leur rapport ?
• Sont il modifiés par les différentes étapes de travail ?
– Représenter le produit de départ et le produit final des étapes de travail.
– Expliciter les changements importants.</td></tr>
<tr><td>2
Les rapports mathématiques</td><td>Transcrire les données de mesures et leurs rapports
Quelles données de mesures interviennent dans l’exercice ?
• Apposer pour chaque donnée un feuillet à la place correspondante ;
– Consigner les unités de mesures ;
– Consigner les valeurs pour chaque donnée ;
– Insérer des feuillets symbolisant des résultats intermédiaires utiles.
• Quelle est le rapport mathématique entre chaque valeur ?
o Insérer les opérations (+, -, ÷, x etc.) ;
o Noter lorsque les valeurs sont identiques et lorsqu’elles apparaissent plusieurs fois.</td></tr>
<tr><td>3
Le calcul</td><td>Consigner progressivement le calcul en incluant tous les résultats intermédiaires et le résultat final
• Où commence le calcul ?
• Comment se déroule le calcul ?
• Que doit-on calculer à chaque étape ?
• Quels sont les résultats intermédiaires ?
• Quel est le résultat final ?</td></tr>
</table>