Hansruedi Kaiser

Eléments constitutifs d’un concept pour la promotion des compétences en numératie

1ère partie
Numératie – Introduction
Exemples de cours

2ème partie
Matériel d’accompagnement didactique

SVEB
FSEA

Schweizerischer Verband für Weiterbildung
Fédération suisse pour la formation continue
Federazione svizzera per la formazione continua
Swiss Federation for Adult Learning

Fédération suisse pour la formation continue
Schweizerischer Verband für Weiterbildung
Oerlikonerstrasse 38
8057 Zürich

Une étude commendée par le Secrétariat d’Etat à l’économie SECO

Schweizerische Eidgenossenschaft
Confédération suisse
Confederazione Svizzera
Confederaziun svizra

Département fédéral de l’économie DFE
Secrétariat d’Etat à l’économie SECO

4.5 Concepts abstraits vs. situationnels

4.5.1 Distribuer et diviser

Les compétences, peu importe le genre, sont associées à des situations. Si une personne est capable de résoudre une situation, cela ne signifie pas pour autant qu'elle parviendra à nouveau à résoudre une autre situation, pourtant similaire. Cela vaut pour tous les concepts mathématiques. A titre d'exemple, nous allons présenter une petite histoire racontée par Hans Heymann, didacticien en mathématiques[21] : « C'est une scène typique qui s'est déroulée avec ma fille Katharina. A l'époque, elle avait 13 ans et n'était pas particulièrement séduite par les mathématiques. Cette scène montre les malentendus formant le fossé entre les mathématiques académiques et la pensée quotidienne : dans le cadre d'un devoir, Katharina avait divisé le chiffre 2 par ¼ conformément aux règles de calcul avec des fractions. Elle vint vers moi, s'étonnant du résultat. Comment le résultat pouvait-il être plus élevé que le dividende ? Elle avait pourtant 'divisé' ! J'essayais de lui expliquer pourquoi cela devait être ainsi. Comme contre-exemple elle indiqua que si elle divisait une pomme en ‚quarts', les morceaux seraient pourtant plus petits que la pomme. Je lui expliquais alors la différence entre fragmenter quelque chose en quelque chose et diviser quelque chose par autre chose. A la fin elle dit : 'Okay, maintenant je sais comment il faut calculer. Mais ne me fais pas croire qu'en mathématiques on pense logiquement !' ».

Ce qui pose problème ici, est le fait que Katharina a une situation particulière devant les yeux, notamment la « division » ou « distribution » d'une pomme ou d'un gâteau à plusieurs enfants.

D'autres situations peuvent être résolues par des divisions, mais elles correspondent à une toute autre problématique. Par exemple la « répartition » ou l'«être contenu »: « 2 kg de farine doivent être ensachées dans des sacs de ¼ kg. Combien de sacs sont nécessaires ? » Dans ce contexte, il est facilement concevable que le résultat (8) soit plus élevé que la quantité de kilogrammes dans les données de départ.

La recherche[22] a révélé une multitude de telles situations en relation avec la division. La plupart suscitent des questions d'après le schéma « répartir » ou « diviser » (cf. tableau à la fin du document). Chacune de ces situations fonctionne d'après une autre logique. La situation suivante par exemple provoque une toute autre image que la répartition d'un gâteau à plusieurs personnes, ou la distribution d'un sac de farine sur plusieurs petits sacs : « Un tapis mesure 20 m² et 4 m de large. Quelle est sa longueur ? »

Les « mathématiques académiques » peuvent traiter et représenter tous ces faits par le même concept mathématique de la division d'un nombre par un autre. Toutefois, cela ne suffit pas pour résoudre un tel exercice rapidement et sûrement au quotidien. En outre, il faut

[21] Heymann, H. W. (1996). *Allgemeinbildung und Mathematik (vol. 13).* Weinheim : Beltz. p. 207f (la citation a légèrement été abrégée).
[22] Gerster, H.-D., & Schultz, R. (2004). Schwierigkeiten beim Erwerb mathematischer Konzepte im Anfangsunterricht. *Bericht zum Forschungsprojekt "Rechenschwäche – Erkennen, Beheben, Vorbeugen". Freiburg i.Br. : Pädagogische Hochschule Freiburg, Institut für Mathematik und Informatik und ihre Didaktiken.*

s'imaginer ce qui se passe réellement dans la situation.[23] Ceci permet d'estimer si le résultat est plus ou moins juste. Si par exemple, on obtient plus de pommes pour chaque enfant qu'on en possède au départ, cela indique qu'une erreur est survenue.

Le fait que des compétences au sens de « résoudre rapidement et sûrement un exercice en numératie » sont situationnelles, se manifeste lorsqu'on questionne des personnes compétentes au sujet de l'exactitude d'un calcul. Selon les situations, on obtient des justifications qui varient fortement :

- Quatre enfants se partagent deux pommes : cela donne une pomme pour deux enfants, donc une demi- pomme par enfant.
- 2 kg de farine doivent être ensachés dans des sacs de ¼ kg : quatre sacs sont nécessaires à 1 kg, il faut donc 8 sacs en tout.
- Un tapis mesure 20 m² et 4 m de long. Lorsqu'on s'imagine le tapis déroulé en longueur sur le sol, 4 mètres carrées pourraient alors être alignés à l'avant. Derrière, une autre ligne peut ainsi être posée. En tout, cinq lignes peuvent être placées l'une derrière l'autre - le tapis mesure donc 5 m de long.

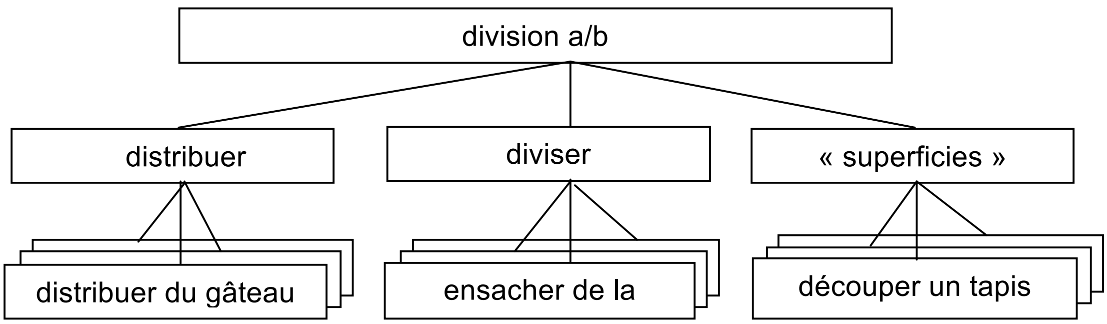

Figure 11 : distribution et division en tant que cas spéciaux de divisions

« Savoir diviser » est donc très ambitieux en tant que compétence mathématique générale. Afin de pouvoir parler d'une telle capacité, il faut d'une part que dans les nombreuses situations ordinaires, la personne dispose au moins d'une compétence situationnelle correspondante. D'autre part, elle doit être capable de se projeter rapidement dans les particularités de situations nouvelles, encore méconnues. Cette aptitude représente évidemment un avantage. Mais pour beaucoup de personnes cela est trop difficile – du point de vue de leurs compétences, mais aussi du point de vue de leurs besoins au quotidien (professionnel).

[23] Vergnaud, G. (1990). Epistemology and Psychology of Mathematics Education. Dans : *Nesher, P. & Kilpatrick, J. : Mathematics and Cognition. A Research Synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Cambridge MA., Cambridge University Press, p. 14-80.*

4.5.2 Concepts abstraits et concepts concrets

1. Diviser

Dans figure 8 les différents niveaux peuvent être vus comme des instruments toujours plus abstraits mais aussi de plus en plus performants, par lesquels un nombre croissant d'exercices concrets peuvent être résolus. Cette pyramide pourrait facilement être élargie de quelques étages vers le haut.

Comme l'illustrent les cas et les situations de divisions dans l'avant-dernière ligne du tableau (à la fin du document), la division a/b peut à son tour être perçue comme un cas spécial d'un instrument encore beaucoup plus performant, notamment la résolution d'une équation à une inconnue (figure 9).

Chacun de ces niveaux a son bien-fondé. Ce qui est décisif, c'est que les apprenants utilisent des instruments maitrisables.

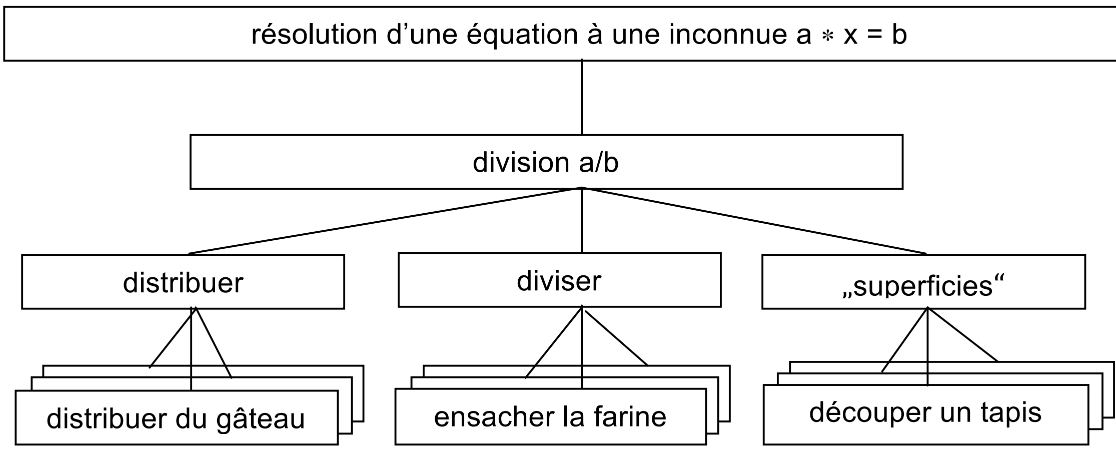

Figure 12 : niveaux représentants des instruments mathématiques toujours plus performants

2. Règle de trois

Pour les problématiques résolubles par une règle de trois existe une hiérarchie similaire de concepts de plus en plus abstraits :

- Les concepts les plus simples sont les **barèmes parallèles**, c'est-à-dire des représentations graphiques ou mentales permettant de varier des données groupées pas à pas. [24]
- La **règle de trois** est légèrement plus performante, les deux étapes des unités « a » vers une unité, et ensuite d'une unité vers des unités « b ».
- Le concept de **deux proportions égales** (faisant intervenir l'idée de la « proportionnalité inverse ») est encore beaucoup plus performant.
- Tous ces concepts peuvent également être compris comme des cas spéciaux d'une **équation à une inconnue.**

[24] Hoyles, C., Noss, R., & Pozzi, S. (2001). Proportional Reasoning in Nursing Practice. *Journal for Research in Mathematics Education,* 32(1), p. 4-27.

Equation à une inconnue
a / b = X /d

Proportions identiques a / b = c /d

Règle de trois
4 fois égal 20
1 fois égal 5
7 fois égal 35

Barèmes parallels
30 45
20 30
10 15

3. Preuves mathématiques

Sur internet, on trouve l'astuce suivant permettant de lire les pensées :

(http://www.prophezeiungsforum.de/scripte/Gedankenleser.htm)

- Pense à un chiffre à deux chiffres (Par exemple : 54)
- Soustraie les deux chiffres qui y figurent, du chiffre initial (Par exemple : 54 – 5 – 4 = 45)
- Cherche le résultat dans la liste et retiens le symbole correspondant.
- **Concentre-toi fortement sur le symbole**. Clique sur la case grise (elle n'es pas reproduite ici) et tes pensées seront lues.

99	m	98	d	97	i	96	I	95	m	94	o	93	T	92	^	91	_	90	^
89	N	88	6	87	o	86	I	85	n	84	d	83	d	82	U	81	I	80	f
79	6	78	U	77	f	76	I	75	o	74	^	73	o	72	I	71	b	70	v
69	{	68	U	67	h	66	I	65	S	64	J	63	I	62	M	61	b	60	n
59	J	58	b	57	_	56	R	55	{	54	I	53	I	52	^	51	x	50	N
49	x	48	f	47	n	46	v	45	I	44	R	43	x	42	d	41	m	40	f
39	o	38	T	37	R	36	I	35	v	34	M	33	z	32	i	31	^	30	i
29	{	28	I	27	I	26	h	25	U	24	T	23	I	22	{	21	v	20	d
19	z	18	I	17	I	16	h	15	J	14	v	13	J	12	x	11	O	10	I
9	I	8	n	7	T	6	T	5	f	4	u	3	i	2	b	1	U	0	I

L’astuce fonctionne toujours. Peu importe quel chiffre l’on choisit, dans la case grise apparaît le symbole correspondant au résultat du calcul.

Explications :

1. Si l’on soustrait d’abord les « unités », uniquement 10,20,30,40,50,60,70,80 ou 90 peuvent figurer comme résultat. De cette façon, il est facilement perceptible que 9,18,27,36,45,54,63,72 et 81 sont les seuls résultats envisageables. Tous ces chiffres ont le même symbole dans le tableau. (Pour que l’astuce ne se remarque pas trop, un nouveau tableau sera produit sur internet lors de chaque essai).
2. Si l’on soustrait d’abord les « unités », on obtient un chiffre des dizaines. Ça donne 10 = 9 + 1, 20 = 2 * 10 = 2 * 9 + 2 etc. C’est-à-dire lorsqu’on soustrait les « dizaines » d’un chiffre des dizaines, on obtient régulièrement un multiple de neuf. Dans le tableau, les multiples de neuf se trouvent sur la diagonale allant d’en bas à gauche à en haut à droite. Dans toutes les cases de cette diagonale figure le même symbole.
3. Un nombre de deux chiffres peut être transcrit par 10 * x+ y, x et y étant des nombres à un chiffre. Le calcul à effectuer s’établit donc de la façon suivante : 10 * x + y -x- y = 9 * x. Ainsi le résultat est toujours divisible par neuf, et le même symbole est assigné à tous les multiples de neuf dans le tableau.

Les trois explications sont des preuves mathématiques correctes et convaincantes. Cependant des concepts de plus en plus abstraits rentrent en jeu.

		Division (quantitative)	**Distribution** (partitive)
	Multiplication a □ b = ?	Division ? □ b = c multiplicateur (nombre de portions) recherché	Division a □ ? = b multiplicande (grandeur des portions) recherchée
1. Multiplication de grandeurs	Donné : Nombre et grandeur des portions partielles	Donné : L'ensemble et la grandeur des portions partielles	Donné : L'ensemble et la grandeur des portions partielles
1.1 Parties-l'ensemble-structure 1.1.1 spatial-simultané	3 sachets, 4 pommes dans chacun.	Au total 12 pommes. Dans chaque sachet 4 pommes.	Au total 12 pommes. Dans 4 sachets.
	3 ficelles, chacune 4 m de long.	Au total 12 m. Chaque bout 4 m.	Au total 12 m. Fractionner en 4 bouts identiques.
	3 récipients, chacun comporte 4 l.	12 l au total. 4 l dans chaque récipient.	12 l au total. Répartir dans 4 récipients identiques.
1.1.2 Temporel-successif	Aller 3 fois. Ramasser 4 pommes à chaque reprise.	Ramasser 12 pommes au total. 4 pommes à chaque reprise.	Ramasser 12 pommes au total. Aller 4 fois.
	Aller 3 fois. Ramasser 4 kg à chaque reprise	Ramasser 12 kg au total. 4 kg à chaque reprise.	Ramasser 12 kg au total. Aller 4 fois.
	4 pommes dans 1 sachet. Combien de pommes dans 3 sachets ?	4 pommes dans 1 sachet. Combien de sachets pour 12 pommes ?	12 pommes doivent être ensachées dans 4 sacs. Combien de pommes par sac ?
1.2 Structure de la proportionnalité	4 km en 1 h. Combien de km en 3 h ?	4 km en 1 h. Quelle durée pour 12 km ?	Il a parcouru 12 km en 4h. Combien de km en 1 h ?
	4 DM par kg. Combien coûtent 3 kg ?	1 kg coûte 4 DM. Combien de kg pour 12 DM ?	4 kg de pommes coûtent 12 DM. Combien coûte 1 kg ?
1.3 Transformation de la masse	1 pouce comporte 2,54 cm. Combien de cm comprennent 3 pouces ?	1 pouce comprend 2,54 cm. Combien de pouces comportent 7,62 cm ?	4 pouces comportent 10,16 cm. Combien de cm comporte 1 pouce ?
1.4 Comparaison multiplicative de deux grandeurs	A possède 4 pommes. B détient 3 fois plus.	A possède 4 pommes, B dispose de 12 pommes. Combien de fois en a-t-il en plus ?	B possède 12 pommes. Il en a 4 fois plus que A.
	A reçoit 5 DM d'argent de poche chaque mois. B en touche 3 fois plus.	A reçoit 5 DM chaque mois, B touche 15 DM. Combien de fois plus reçoit B ?	B reçoit 15 DM. C'est 4 fois plus que A. Combien de DM reçoit A ?
1.5 Tranformation multiplicative d'une grandeur	Une bande élastique peut être étirée jusqu'à 3 fois sa longueur. Jusqu'à quelle longueur peut être étendue une bande de 4 m ?	Une bande élastique de 4 m peut être étendue jusqu'à 12 m. Combien de fois plus de sa longueur originale peut-elle être étendue ?	Une bande élastique peut être étirée jusqu'à 4 fois sa longueur. Quelle longueur initiale a une bande étendue jusqu'à 12m ?
2. Produit de grandeurs 2.1 Nombre x nombre modèle combinatoire Mesurer par superficie-unité	3 jupes, 4 blouses. Combien de différentes possibilités ?	Une division serait possible mais ce n'est pas courant.	
	Une chambre mesure 3 m de long et 4 m de large. Combien de mètres carrées nécessite-t-on pour paver ?		
2.2 Longueur x longueur	Un tapis mesure 3 m de long et 4 m de large. Quelle est sa superficie ?	Un tapis mesure 20 m² et 4 m de large. Quelle est sa longueur ?	
2.3 Produit d'autres grandeurs	Un chauffage électrique d'une alimentation de 3 kW réchauffe durant 4h. Combien de kW comsomme-t-il ?	Un chauffage électrique d'une alimentation de 4 kW a consommé 12 kWh. Combien de temps était-il enclenché ?	En 4h une chauffage électrique a consommé 12 kWh. Quelle est sa puissance calorifique ?

Tableau 6 : situations de multiplications / divisions (d'après le tableau 9.1, Gerster & Schultz, 2004, p. 389)